LÊ HỮU TRÍ (Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC - NGUYỄN VIỆT HÒA - LÊ BÍCH NGỌC

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN

11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỮU TRÍ – Chủ biên
LÊ HỒNG ĐỨC – NGUYỄN VIỆT HOÀ – LÊ BÍCH NGỌC

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM
CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN
11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Trong thời gian không xa, theo chủ trương của Bộ GD&ĐT các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. *Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.*
2. *Trong những câu hỏi có phần trắc nghiệm sẽ được hiểu là "**trắc nghiệm và tự luận**". Ở đây các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:*
   - *Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
   - *Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm còn lại.*

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. *Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa* $\frac{a}{2}$ *điểm với xác suất 25%.*
2. *Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng* $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ *điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM
CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN THPT

Bộ sách này sẽ cung cấp cho bạn đọc một ngân hàng bài tập tự luận và trắc nghiệm môn toán THPT có chất lượng theo đúng thứ tự của chương trình Toán PTTH bởi về hình thức bạn đọc sẽ nhận thấy rằng bộ sách này chính là những cuốn sách giải bài tập của bộ sách ***Học và Ôn tập Toán*** *(được viết theo lớp 10, 11, 12) do NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ấn hành.*

Cuốn **TOÁN 11** *được biên soạn theo đúng thứ tự của chương trình Toán lớp 11 và được chia thành 2 phần:*

Phần I: Đại số và Giải tích

Chương I:	Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác
Chương II:	Tổ hợp và xác suất
Chương III:	Dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân
Chương IV:	Giới hạn
Chương V:	Đạo hàm

Phần II: Hình học

Chương I:	Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng
Chương II:	Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian Quan hệ song song
Chương III:	Vectơ trong không gian – Quan hệ vuông góc

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Lê Hồng Đức phụ trách
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà Nội, ngày 19 tháng 5 năm 2007

NHÓM CỰ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

PHẦN I: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HÀM TUẦN HOÀN

Hàm số f(x) xác định trên tập hợp D gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

$$x - T \in D \text{ và } x + T \in D \qquad (1)$$

$$f(x + T) = f(x) \qquad (2)$$

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số T có các tính chất trên gọi là *chu kì cơ sở* của hàm tuần hoàn f(x).

Chú ý: (*Các dấu hiệu để biết hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn*): Hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

a. Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.

b. Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.

c. Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.

d. Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $.. < x_n < x_{n+1} < ..$ mà $\left|x_n - x_{n+1}\right| \to 0$ hay ∞.

2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC BIẾN SỐ THỰC

2.1. Hàm số y = sinx

Ta có:

- Hàm số y = sinx là hàm số lẻ trên **R**.
- Hàm số y = sinx tuần hoàn với chu kì 2π.

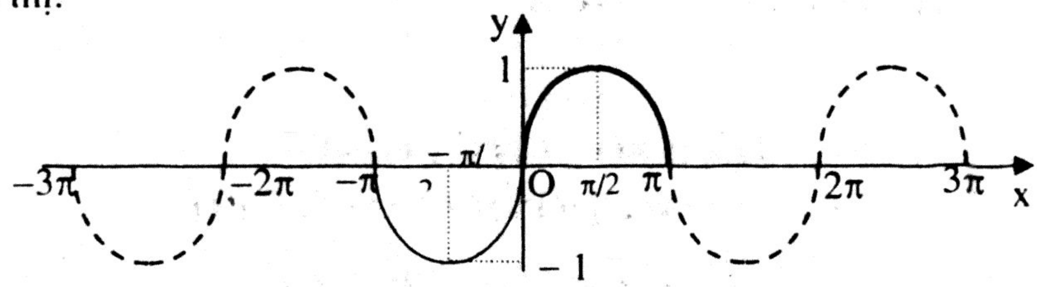
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = sinx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn [0, π], sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn [– π, π], cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = sinx trên [0, π]

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \pi/2 & & \pi \\ \hline y & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & 0 \end{array}$$

Đồ thị:



Từ đây, ta có nhận xét quan trọng là $|\sin x| \le 1$.

2.2. Hàm số y = cosx

Ta có:

- Hàm số y = cosx là hàm số chẵn trên **R**.
- Hàm số y = cosx tuần hoàn với chu kì 2π.

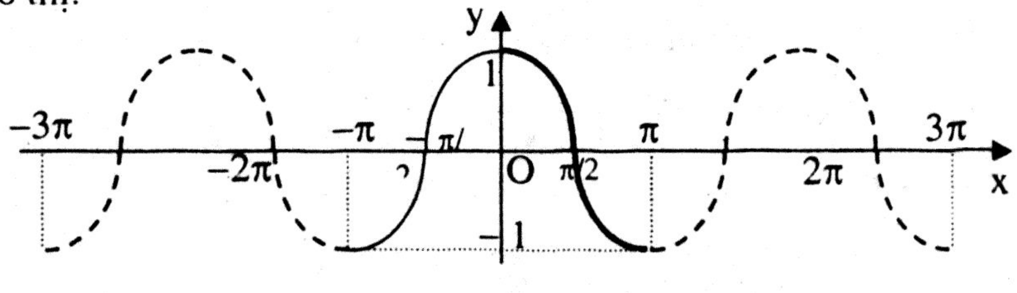
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cosx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua trục Oy, ta được đồ thị trên đoạn $[-\pi, \pi]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = cosx trên $[0, \pi]$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		π
y	1	↘	-1

Đồ thị:



Từ đây ta có nhận xét quan trọng là $|\cos x| \le 1$.

2.3. Hàm số y = tanx

Ta có:

- Hàm số y = tanx là hàm số lẻ trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- Hàm số y = tanx tuần hoàn với chu kì π.

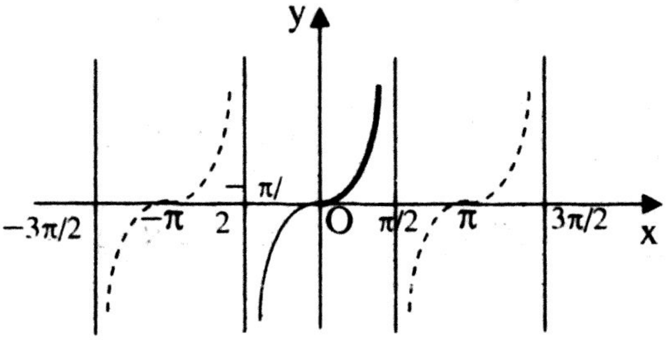
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = tanx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2})$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = tanx trên $[0, \frac{\pi}{2})$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		π/2
y	0	$\nearrow$	+ ∞

Đồ thị:



2.4. Hàm số y = cotx

Ta có:

- Hàm số y = cotx là hàm số lẻ trên $\mathbf{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- Hàm số y = cotx tuần hoàn với chu kì π.

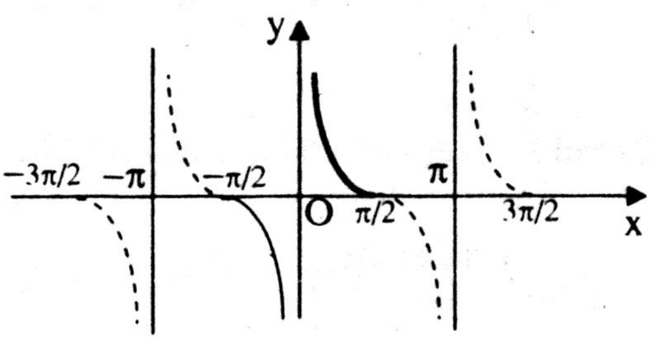
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cotx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $(0, \frac{\pi}{2}]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = cotx trên $(0, \frac{\pi}{2}]$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		π/2
y	+ ∞	$\searrow$	0

Đồ thị:



II. BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{2\sin x - \sqrt{3}}$.

A. $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$. **C.** $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$.

B. $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$. **D.** $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $y = \dfrac{1}{\cot x - \sqrt{3}}$.

A. $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{6} + k\pi\}$. **C.** $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

B. $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{6} + k\pi, k\pi\}$. **D.** $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-2\cos x - \sqrt{2}}$.

A. $D = [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$. **C.** $D = [-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$.

B. $D = [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$. **D.** $D = [-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $y = \sqrt{\dfrac{\cos x}{1 + 2\cos x} - \dfrac{1 - \cos x}{1 - 2\cos x}}$.

A. $D = \mathbf{R}$.

B. $D = (-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi)$.

C. $D = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$.

D. $D = (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 3: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = x.\sin x$.

A. Hàm chẵn. **B.** Hàm lẻ. **C.** Không chẵn không lẻ.

b. $f(x) = \cos^2 x + 4\sin x$.

A. Hàm chẵn. **B.** Hàm lẻ. **C.** Không chẵn không lẻ.

Bài tập 4: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = \dfrac{\cos^{2004n} x + 2004}{\sin x}$.

A. Hàm chẵn. **B.** Hàm lẻ. **C.** Không chẵn không lẻ.

b. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x + \tan x}$.

A. Hàm chẵn. **B.** Hàm lẻ. **C.** Không chẵn không lẻ.

Bài tập 5: Chứng tỏ rằng các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kì nhỏ nhất của chúng:

a. $f(x) = \sin 2x + 2\cos 3x$.

A. $T = 2\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = \dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{3}$.

b. $f(x) = 2\cos^2 x + 4\cos^3 x + 16\cos^4 x$.

A. $T = 2\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài tập 6: Chứng tỏ rằng các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kì nhỏ nhất của chúng:

a. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.

A. $T = \pi\sqrt{2}$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{2}$.

b. $f(x) = \sqrt{1 + \cot x}$.

A. $T = 2\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài tập 7: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kì nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \cot\sqrt{x}$.   b. $f(x) = \cos(x^2)$.

Bài tập 8: Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên một chu kì của nó:

a. $y = \cos 2x$.   c. $y = \cot 3x$.

b. $y = 1 - \cos x$.   d. $y = 1 - \cos 4x$.

Bài tập 9: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = \cos(x - \dfrac{\pi}{4})$.   c. $y = \sin(\dfrac{\pi}{4} - x)$.

b. $y = \cot(x + \dfrac{\pi}{3})$.   d. $y = \tan(2x - \dfrac{\pi}{6})$.

Bài tập 10: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = 1 - \sin x$.   c. $y = 2 + \tan x$.

b. $y = \cos 2x$.   d. $y = 2\cot 2x$.

§ 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CÔNG THỨC CỘNG

a. $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

b. $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

c. $\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

d. $\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

e. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}$

f. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x.\tan y}$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

a. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\sin^2 x$

c. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

3. CÔNG THỨC NHÂN BA

a. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

b. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

c. $\tan 3x = \dfrac{(3-\tan^2 x)\tan x}{1-3\tan^2 x}$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

a. $\cos x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

b. $\sin x.\sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$.

c. $\sin x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$.

d. $\cos x.\sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$.

5. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

a. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.

b. $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

c. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.

d. $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

e. $\tan x + \tan y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$.

g. $\cot x + \cot y = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$.

f. $\tan x - \tan y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$.

h. $\cot x - \cot y = \dfrac{\sin(y-x)}{\sin x.\sin y}$.

6. CÔNG THỨC HẠ BẬC

a. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

c. $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

b. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

d. $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$.

7. CÔNG THỨC RÚT GỌN

Ta có:

a. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ với $\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$.

$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ với $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$.

b. $a\sin x - b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\alpha)$ với $\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$.

$= -\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)$ với $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$.

Hệ quả:

a. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$.

b. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$.

c. Mở rộng:

$\cot x + \tan x = \dfrac{2}{\sin 2x}$;

$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$.

8. CÔNG THỨC TÍNH **sinα, cosα, tanα** THEO **tan $\dfrac{\alpha}{2}$**

Nếu đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$, ta được:

$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 11: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A = \cos a.\cos 2a.\cos 3a$. b. $B = 2\sin a.\sin 2a.\cos\frac{5a}{2}$.

Bài tập 12: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = (\cos a + 1).\sin^4\frac{a}{2} - \cos a.\sin^2\frac{a}{2} - 1$.

b. $B = \cos^5 a + \sin^7 a + \frac{1}{2}(\cos^3 a + \sin^5 a)\sin 2a - (\cos a + \sin a)$.

Bài tập 13: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots-\sqrt{2-2\cos x}}}}_{\text{n dấu căn}}, \text{ với } 0 \le x \le 2\pi.$$

A. $A = \cos nx$. **B.** $A = \sin\frac{x}{2}$. **C.** $A = \cos\frac{x}{2^n}$. **D.** $A = \sin\frac{x}{2^n}$

Bài tập 14: Với $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hãy rút gọn các biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\cos a.\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a.\cos 3a} + \ldots + \frac{1}{\cos na.\cos(n+1)a}$.

A. $A = \frac{2\sin na}{\cos na.\sin 2a}$. **C.** $A = \frac{2\cos na}{\cos(n+1)a.\sin 2a}$.

B. $A = \frac{2\sin na}{\cos(n+1)a.\sin 2a}$. **D.** $A = \frac{2\cos na}{\sin(n+1)a.\sin 2a}$.

b. $B = \frac{1}{\sin a.\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a.\sin 3a} + \ldots + \frac{1}{\sin na.\sin(n+1)a}$.

A. $B = \frac{1}{\sin^2 a}$. **C.** $B = \frac{\sin na}{\sin^2 a.\sin(n+1)a}$.

B. $B = \frac{1}{\sin^2(n+1)a}$. **D.** $B = \frac{\cos na}{\sin^2 a.\sin(n+1)a}$.

Bài tập 15: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \cos^2(x - \frac{\pi}{3}) + \cos^2 x + \cos^2(x + \frac{\pi}{3}).$$

Bài tập 16: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a. $A = a.\cos 4x + 4a.\cos 2x + b - \cos^4 x$.

A. a tuỳ ý và $b = \frac{1}{8}$. **C.** $a = b = \frac{1}{8}$.

B. $a = \frac{1}{8}$ và b tuỳ ý. **D.** $a = -\frac{1}{8}$ và $b = \frac{1}{8}$.

b. $B = 2a.\sin x - a.\sin 3x + b\sin 5x - \sin^5 x$.

A. $a = \frac{1}{16}$ và $b = \frac{15}{16}$. **C.** $a = \frac{15}{16}$ và $b = \frac{1}{16}$.

B. $a = b = 0$. **D.** Vô nghiệm.

Bài tập 17: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$.

A. $A = \frac{1}{16}$. **B.** $A = \frac{1}{32}$. **C.** $A = \frac{\sqrt{2}}{32}$. **D.** $A = \frac{\sqrt{3}}{32}$.

b. $B = \sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}$.

A. $B = \frac{1}{32}$. **B.** $B = \frac{1}{16}$. **C.** $B = \frac{7}{8}$. **D.** $B = \frac{1}{2}$.

Bài tập 18: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}$.

A. $A = 1$. **B.** $A = \frac{1}{2}$. **C.** $A = \frac{3}{2}$. **D.** $A = \frac{5}{4}$.

b. $B = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7}$.

A. $B = \frac{13}{16}$. **B.** $B = \frac{7}{8}$. **C.** $B = \frac{3}{4}$. **D.** $B = \frac{1}{2}$.

Bài tập 19: Tính giá trị của cos2x, biết:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} = 6.$$

A. $\cos 2x = -1$. **B.** $\cos 2x = 0$. **C.** $\cos 2x = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos 2x = \frac{2}{3}$.

Bài tập 20: Tính giá trị của sin(a + b), biết:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b = m \\ \sin a + \sin b = n \end{cases}, \text{ với } m, n \neq 0.$$

A. $\frac{mn}{m^2 + n^2}$. **B.** $\frac{2mn}{m^2 + n^2}$. **C.** $\frac{m^2 + n^2}{mn}$. **D.** $\frac{m + n}{mn}$.

Bài tập 21: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $1 + \cos a + \cos 2a + ... + \cos na = \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$.

b. $\sin x + \sin(x + a) + ... + \sin(x + na) = \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\sin(x + \frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}$.

Bài tập 22: Chứng minh rằng trong ΔABC ta luôn có:

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.

b. $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 1$.

c. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ với ΔABC không vuông.

d. $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$.

e. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$.

f. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

Bài tập 23: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y = 3\sqrt{1+\sin x} - 1$.

A. $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 0$.
C. $y_{Max} = \sqrt{2} - 1$ và $y_{Min} = 0$.

B. $y_{Max} = 3\sqrt{2} - 1$ và $y_{Min} = -1$.
D. $y_{Max} = 3\sqrt{2} + 1$ và $y_{Min} = -1$.

b. $y = 2 + 2\sin x + \cos^2 x$.

A. $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = -1$.
C. $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = 1$.

B. $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = 0$.
D. $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 1$.

Bài tập 24: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$.

A. $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = -\sqrt{3}$.
C. $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -1$.

B. $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -\sqrt{3}$.
D. $y_{Max} = \sqrt{2}$ và $y_{Min} = -\sqrt{2}$.

b. $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ với $x \in [0, \pi]$.

A. $y_{Max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_{Min} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
C. $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $y_{Max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_{Min} = 0$.
D. $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 25: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x}.$$

A. $y_{Max} = 1 + \sqrt{3}$.
C. $y_{Max} = 2\sqrt{3}$.

B. $y_{Max} = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.
D. $y_{Max} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các phương trình:

$$\sin x = m; \qquad \cos x = m; \qquad \tan x = m; \qquad \cot x = m$$

được gọi là những **phương trình lượng giác cơ bản**.

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình:

$$\sin x = m$$

Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m| \le 1$, xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \sin\alpha$, ta được:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình:

$$\cos x = m.$$

Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m| \le 1$, xét hai trường hợp:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \cos\alpha$, ta được

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 3: Giải và biện luận phương trình:

$$\tan x = m.$$

Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tan của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng:

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tan của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \tan\alpha$, ta được

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số m phương trình $\tan x = m$ luôn có nghiệm.

Bài toán 4: Giải và biện luận phương trình:

$$\cot x = m.$$

Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cot của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cot của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \cot\alpha$, ta được

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Bài toán 5: Biện luận theo m số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình lượng giác cơ bản.

Phương pháp chung

Giả sử với phương trình:

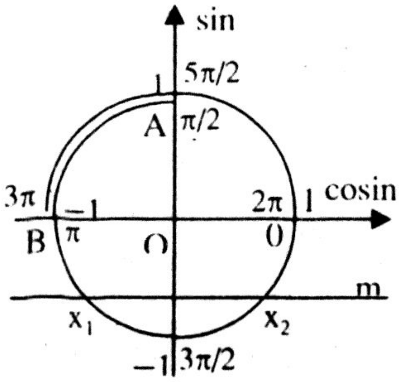
$$\sin x = m.$$

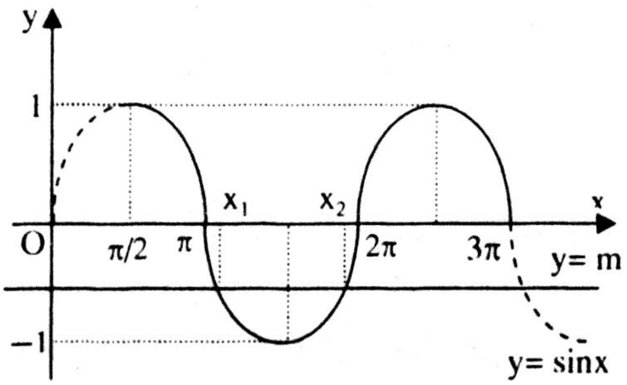
Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Biểu diễn (α, β) trên đường tròn đơn vị thành cung $\overset{\frown}{AB}$

Bước 2. Tịnh tiến đường thẳng m song song với trục cosin, khi đó số giao điểm của nó với cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.





Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$, lấy trên (α, β).

Bước 2. Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ song song với trục Ox, khi đó số giao điểm của nó với phần đồ thị hàm số $y = \sin x$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.

Chú ý: Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho:

1. Phương trình $\cos x = m$, với lưu ý khi sử dụng cách 1 ta tịnh tiến đường thẳng m song song với trục sin.
2. Với các phương trình $\tan x = m$ và $\cot x = m$ ta chỉ có thể sử dụng cách 2.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 26: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

A. $x = l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pi + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1962

b. $\cos(\pi\cos 3x) = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4}, l \in \mathbf{Z}$. C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 27: Giải các phương trình sau:

a. $\tan[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)] = 1$.

A. $x = 2l\pi$ và $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$. C. $x = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$ và $x = \pi + 2l\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2l\pi$.

với $l \in \mathbf{Z}$.

b. $\cot[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] = 1$.

A. $x = 2l\pi$ và $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$.

B. $x = 2l\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi$.

với $l \in \mathbf{Z}$.

§4. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán 1: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

Phương pháp chung

Đặt hàm số lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ nếu có (thí dụ với $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$), rồi giải phương trình theo ẩn phụ này và từ đó suy ngược lại nghiệm x.

Bài toán 2: Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Phương pháp chung

Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin x + b\cos x = c. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.

2. Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2. Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta .$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, kiểm tra vào phương trình

Bước 2. Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2} + b.\frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$$\Leftrightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0. \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 3: Với những yêu cầu biện luận tính chất nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp điều kiện cần và đủ.

***Nhận xét quan trọng*:**

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với $D \subset [0, 2\pi]$.
3. Cách 3 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu biện luận theo tham số để phương trình k có nghiệm thuộc tập D với $D \cap [0, 2\pi] \neq \varnothing$.
4. Từ cách giải 1 ta có được kết quả sau:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

kết quả đó gợi ý cho bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số dạng $y = a.\sin x + b.\cos x$, $y = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác.

Dạng đặc biệt:

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3: Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx.

Phương pháp chung

Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $a = d$.

- Nếu $a = d$, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq d$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

Đặt $t = \tan x$, phương trình có dạng:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t

Cách 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ và } \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ta được :

$$b.\sin 2x + (c - a)\cos 2x = d - c - a. \qquad (3)$$

Đây là phương trình bậc nhất của sin và cos.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

Bài toán 4: Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx.

Phương pháp chung

Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx có dạng:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{hoặc } a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0. \quad (2)$$

Để giải phương trình (1) ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt sinx + cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$at + b\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0. \quad (2)$$

Bước 2. Giải (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Với $t = t_0$, ta được:

$$\sin x + \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Chú ý:

1. Ta có thể giải (1) bằng cách đặt ẩn phụ $z = \frac{\pi}{4} - x$, khi đó ta có:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\cos z$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4} - z) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 2z)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2}(2\cos^2 z - 1)$$

Khi đó, phương trình ban đầu được đưa về dạng phương trình bậc 2 đối với cosz.

2. Phương trình (2) được giải tương tự như (1) với ẩn phụ:

$t = \sin x - \cos x$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 28: Cho phương trình:

$$\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{3}{2}$.

A. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

A. $m \geq 0$. **B.** $|m| \leq 1$. **C.** $0 \leq m \leq 1$. **D.** $-1 \leq m \leq 0$.

Bài tập 29: Cho phương trình:

$$\cos 2x + 5\sin x + m = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 2.

A. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **D.** Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

A. $-4 \leq m \leq 6$. **B.** $-1 \leq m \leq 2$. **C.** $|m| \leq 2$. **D.** $m \leq 0$.

Bài tập 30: Giải các phương trình sau:

a. $2\sin x(\cos x - 1) = \sqrt{3}\cos 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$. **C.** $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $2\sin 3x - \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$.

A. Vô nghiệm. **C.** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 31: Giải các phương trình sau:

a. $3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 4\sin^3 x - 1$.

A. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$. **C.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

A. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{3}$. **C.** $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$.

B. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$. **D.** $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 32: Cho phương trình:

$$(m - 1)\sin x - \cos x = 1.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

A. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ **C.** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

B. $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ **D.** $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

A. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$ **C.** $[1, 3].$

B. $[0, 2].$ **D.** $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty).$

Bài tập 33: Giải các phương trình:

a. $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4.$

A. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$ **C.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \pi + k\pi.$ **D.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $2\sin^2 x + 3\cos^2 x = 5\sin x.\cos x.$

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\tan\alpha = \frac{3}{2}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\cot\alpha = \frac{3}{2}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\tan\alpha = \frac{2}{3}$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\cot\alpha = \frac{2}{3}$.

Bài tập 34: Cho phương trình:

$$3\sin^2 x + m.\sin 2x - 4\cos^2 x = 0.$$

a. Giải phương trình khi m = 4.

A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$ **C.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ **D.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

A. $m = 4.$ **B.** $m \geq 4.$ **C.** $m \leq 4.$ **D.** Mọi m.

Bài tập 35: Giải các phương trình sau:

a. $12(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x - 12 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   **D.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$.

A. $x = 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   C. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   D. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 36: Giải các phương trình sau:

a. $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   **D.** Vô nghiệm.

b. $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.   C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   **D.** Vô nghiệm.

Bài tập 37: Giải các phương trình:

a. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

A. $x = k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.   C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.   **D.** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $4\sin^2 x - \tan^2 x = 1$.

A. $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.   **D.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 38: Cho phương trình:

$$(1 - m)\tan^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3m = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{1}{2}$.

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có nhiều hơn 1 nghiệm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.

A. $m \in (\frac{1}{3}, 3) \setminus \{1\}$.
C. $m \in (0, 2) \setminus \{\frac{1}{3}\}$.
B. $m \in (\frac{1}{3}, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
D. $m \in (\frac{1}{2}, 3) \setminus \{2\}$.

Bài tập 39: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 3\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2})$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. Vô nghiệm.

b. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$.

A. $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. Vô nghiệm.

Bài tập 40: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b. $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$.

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 41: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. Vô nghiệm.

b. $\sin^2x + 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin x.\sin^2\frac{x}{2} + \cot x = 0.$

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

B. $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ **D.** Vô nghiệm.

Bài tập 42: Giải phương trình:

a. $\cos^4x + \sin^6x = \cos 2x.$

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

B. $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ **D.** Vô nghiệm.

b. $\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x.$

A. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

B. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 43: Giải phương trình:

$$(\sin^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}})^2 + (\cos^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}})^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x.$$

A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$ C. $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$

B. $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ **D.** Vô nghiệm.

Bài tập 44: Giải phương trình:

$$\cos^{13}x + \sin^{14}x = 1.$$

A. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{13} + 2k\pi.$ C. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = k\pi.$

B. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + 2k\pi.$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = 2k\pi.$

với $k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 45: Giải phương trình:

$$\left(\tan x + \frac{1}{4}\cot x\right)^n = \cos^n x + \sin^n x, \text{ với } n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

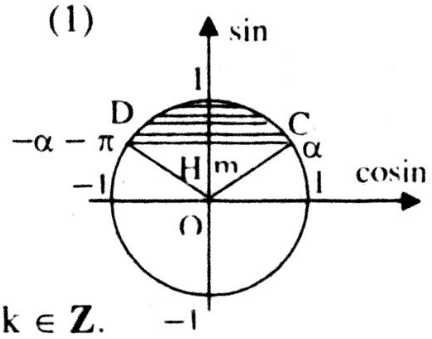
BÀI ĐỌC THÊM

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán 1: Giải bất phương trình:

$$\sin x < m, \text{ với } |m| < 1. \qquad (1)$$



Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $m = \sin\alpha$, với $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bước 2: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -\alpha - \pi + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Chú ý:

1. Các em học sinh cần nắm được cách thức xác định khoảng nghiệm trên của bất phương trình. Cụ thể:

Bước 1: Trên trục sin, lấy điểm H sao cho $\overline{OH} = m$.

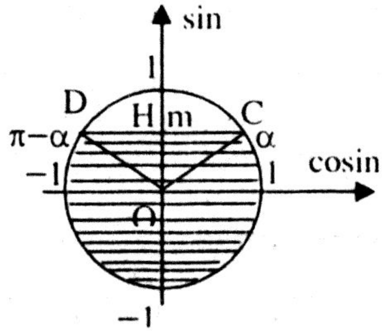
Bước 2: Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với trục sin và cắt đường tròn đơn vị tại hai điểm C, D.

Bước 3: Nghiệm nhận được của bất phương trình là cung góc lấy ngược chiều kim đồng hồ, rồi do chu kì tuần hoàn của hàm sin ta thêm vào hai đầu $2k\pi$.

2. Cũng với phương pháp trên ta nhận được nghiệm của bất phương trình

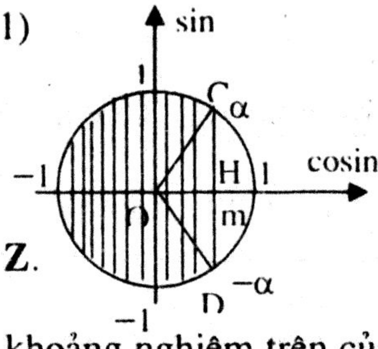
$$\sin x > m, \text{ với } |m| < 1$$

là $\alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.



Bài toán 2: Giải bất phương trình:

$$\cos x < m, \text{ với } |m| < 1. \qquad (1)$$



Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

a. Đặt $m = \cos\alpha$, với $\alpha \in (0, \pi)$.

b. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Chú ý:

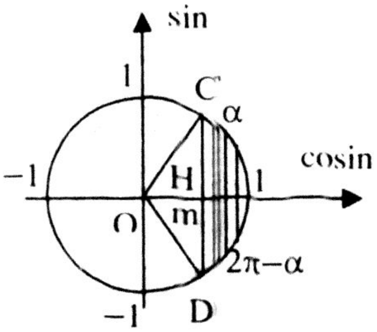
1. Các em học sinh cần nắm được cách thức xác định khoảng nghiệm trên của bất phương trình. Cụ thể:

- Trên trục cos, lấy điểm H sao cho $\overline{OH} = m$.
- Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với trục cos và cắt đường tròn đơn vị tại C, D.
- Nghiệm nhận được của bất phương trình là cung góc lấy ngược chiều kim đồng hồ, rồi do chu kì tuần hoàn của hàm cos ta thêm vào hai đầu $2k\pi$.

2. Cũng với phương pháp trên ta nhận được nghiệm của bất phương trình

$$\cos x > m, \text{ với } |m| < 1$$

là $-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.



Bài toán 3: Giải bất phương trình:

$$\tan x < m. \qquad (1)$$

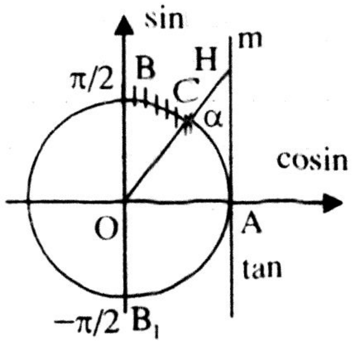
Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $m = \tan\alpha$, với $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bước 2: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$



Chú ý:

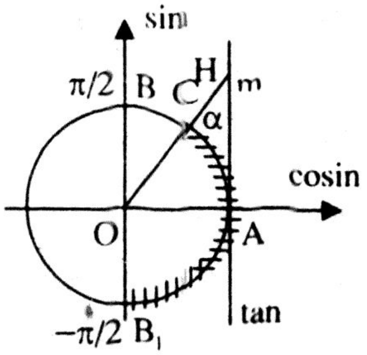
1. Các em học sinh cần nắm được cách thức xác định khoảng nghiệm trên của bất phương trình. Cụ thể:

- Trên trục tan, lấy điểm H sao cho $\overline{AH} = m$.
- Nối OH cắt đường tròn đơn vị tại C.
- Nghiệm nhận được của bất phương trình là cung góc lấy ngược chiều kim đồng hồ trên $\overset{\frown}{B_1B}$, rồi do chu kì tuần hoàn của hàm tan ta thêm vào hai đầu $k\pi$.

2. Cũng với phương pháp trên ta nhận được nghiệm của bất phương trình

$$\tan x > m$$

là $\alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.



3. Đối với bất phương trình kép

$$a < \tan x < b \underset{b=\tan\beta}{\overset{a=\tan\alpha}{\Leftrightarrow}} \tan\alpha < \tan x < \tan\beta \Leftrightarrow \alpha + k\pi < x < \beta + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 4: Giải bất phương trình:

$$\cot x < m. \qquad (1)$$

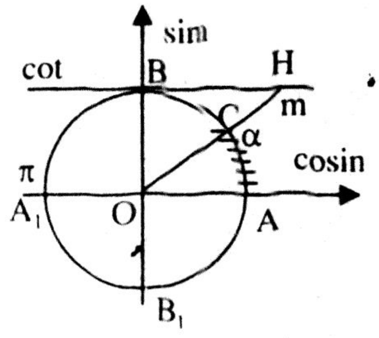
Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $m = \cot\alpha$, với $\alpha \in (0, \pi)$.

Bước 2: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

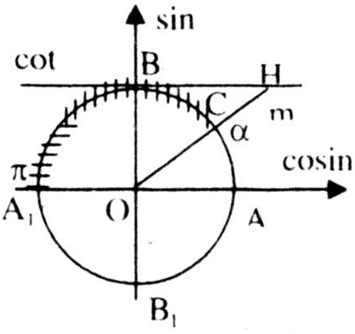


Chú ý:

1. Các em học sinh cần nắm được cách thức xác định khoảng nghiệm trên của bất phương trình. Cụ thể:

- Trên trục cot, lấy điểm H sao cho $\overline{BH} = m$.

- Nối OH cắt đường tròn đơn vị tại C.
- Nghiệm nhận được của bất phương trình là cung góc lấy ngược chiều kim đồng hồ trên $\overset{\frown}{AA_1}$, rồi do chu kì tuần hoàn của hàm cot ta thêm vào hai đầu $k\pi$.



2. Cũng với phương pháp trên ta nhận được nghiệm của bất phương trình

$$\cot x > m$$

là $k\pi < x < \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

3. Đối với bất phương trình kép

$$a < \cot x < b \overset{a=\cot g\alpha}{\underset{b=\cot g\beta}{\Leftrightarrow}} \cot\alpha < \cot x < \cot\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha + k\pi < x < \beta + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 46: Giải các bất phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{\sin x} \le 2$.

b. $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} < 0$.

Bài tập 47: Giải các bất phương trình sau:

a. $\sin(x - \dfrac{\pi}{3}) > \sin x$.

b. $1 + \cos 2x < \cos x$.

Bài tập 48: Giải các bất phương trình sau:

a. $\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} \le 0$.

b. $(3 + \cot x)^2 < 5(3 + \cot x)$.

Bài tập 49: Giải các bất phương trình sau:

a. $\cot(\cos x) > 0$.

b. $\cot(\sin x) > 0$.

Bài tập 50: Giải các bất phương trình sau:

a. $\cot(\tan x) > 0$.

b. $\cot(\cot x) > 0$.

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (1 điểm): Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ có cùng tập xác định.

b. Các hàm số $y = \tan 3x$, $y = \cot x$ có cùng tập xác định.

c. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$ là những hàm số lẻ.

d. Các hàm số $y = \cos x$, $y = \cot x$ là những hàm số chẵn.

Câu II. (1 điểm): Hãy chứng tỏ hàm số sau là hàm tuần hoàn và xác định chu kì của nó:

$$f(x) = 2\cos 2x.$$

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{2}$.

Câu III. (2 điểm): Rút gọn biểu thức:

$$A = \cos 8x.\cot 4x - \frac{\cot^2 2x - 1}{2\cot 2x}.$$

A. $A = \cos x$. **B.** $A = \sin 2x$. **C.** $A = \cos 8x$. **D.** $A = -\sin 8x$.

Câu IV. (6 điểm): Giải các phương trình sau:

a. (3 điểm): $\sin(\pi \sin 2x) = 1$.

A. $x = l\pi, l \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \pi + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

b. (3 điểm): $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (1 điểm): Xác định chu kì tuần hoàn của hàm số sau:

$$f(x) = \cot\frac{x}{2} - 4\tan\frac{x}{4}.$$

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = \frac{\pi}{2}$. **D.** $T = \frac{\pi}{4}$.

Câu II. (1 điểm): Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

$$f(x) = |x|.\cos x.$$

A. Hàm chẵn. **B.** Hàm lẻ. **C.** Không chẵn không lẻ.

Câu III. (2 điểm): Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{\cos 2x} + 1\right).\tan x.$$

A. $A = \sin 2x$. **B.** $A = \cos x$. **C.** $A = \tan 2x$. **D.** $A = \cot 2x$.

Câu IV. (6 điểm): Cho phương trình:

$$\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0.$$

a. (3 điểm): Giải phương trình với $m = \frac{3}{2}$.

A. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **D.** Vô nghiệm.

b. (3 điểm): Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

A. $m \geq 0$. **B.** $|m| \leq 1$. **C.** $0 \leq m \leq 1$. **D.** $-1 \leq m \leq 0$.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B.

Bài tập 2.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Hàm số xác định khi:

$$-2\cos x-\sqrt{2}\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D=[\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi],\ k\in\mathbf{Z}$.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y=\sqrt{\frac{(1-2\cos x)\cos x-(1+2\cos x)(1-\cos x)}{(1+2\cos x)(1-2\cos x)}}=\frac{1}{\sqrt{4\cos^2 x-1}}.$$

Hàm số xác định khi:

$$4\cos^2x-1>0\Leftrightarrow |\cos x|>\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D=(-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi),\ k\in\mathbf{Z}$.

Bài tập 3. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). C.

Bài tập 4. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A.

Bài tập 5. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 6. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B.

Bài tập 7.

a. Ta có:

- Hàm cotx tuần hoàn với chu kỳ π.
- Hàm $\cot\sqrt{x}$ tuần hoàn với chu kỳ π^2,

Nhưng vì 1 và π không khả ước, nghĩa là không tồn tại bội số chung bé nhất đối với các chu kỳ π và π^2, nên hàm số f(x) không tuần hoàn.

Chú ý: *Các em học sinh có thể chứng minh hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp chứng minh phản chứng.*

b. Hàm số f(x) không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0, thật vậy:

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}\to 0 \text{ khi } k\to\infty \text{ (dấu hiệu d).}$$

Bài tập 8.

a. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn [0, π].

Ta có ngay, hàm số $y = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ nên:

- Nghịch biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.
- Đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

b. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[0, 2\pi]$.

Ta có, hàm số $y = \cos x$

- Nghịch biến trên khoảng $(0, \pi)$.
- Đồng biến trên khoảng $(\pi, 2\pi)$.

Do đó, hàm số $y = 1 - \cos x$

- Đồng biến trên khoảng $(0, \pi)$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\pi, 2\pi)$.

c. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{3}$, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên khoảng $(0, \frac{\pi}{3})$ và trên khoảng này hàm số luôn nghịch biến.

d. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ta có, hàm số $y = \cos 4x$

- Nghịch biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{4})$.
- Đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Do đó, hàm số $y = 1 - \cos 4x$

- Đồng biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{4})$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 9. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 10. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 11.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{1}{2}(\cos 3a + \cos a).\cos 3a = \frac{1}{2}(\cos^2 3a + \cos 3a.\cos a)$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1 + \cos 6a) + \frac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a)] = \frac{1}{4}(1 + \cos 6a + \cos 4a + \cos 2a).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = (\cos a - \cos 3a).\cos\frac{5a}{2} = \cos\frac{5a}{2}.\cos a - \cos 3a.\cos\frac{5a}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7a}{2} + \cos\frac{3a}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{11a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{11a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right).$$

Bài tập 12.

a. Đặt $t = \sin^2\frac{a}{2}$, khi đó biểu thức được viết lại dưới dạng:

$$A = (\cos a + 1).t^2 - t.\cos a - 1.$$

Phương trình A = 0 có nghiệm theo t là $t = 1$ và $t = -\frac{1}{\cos a + 1}$ do đó A được phân tích thành:

$$A = (t - 1)[(\cos a + 1).t + 1] = \left(\sin^2\frac{a}{2} - 1\right)\left(2\cos^2\frac{a}{2}.\sin^2\frac{a}{2} + 1\right)$$

$$= \left(\sin^2\frac{a}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sin^2 a + 1\right).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \cos^5 a + \sin^7 a + (\cos^3 a + \sin^5 a)\sin a.\cos a - (\cos a + \sin a)$$

$$= \cos^5 a + \sin^7 a + \cos^4 a.\sin a + \sin^6 a.\cos a - (\cos a + \sin a)$$

$$= \cos^4 a(\cos a + \sin a) + \sin^6 a(\cos a + \sin a) - (\cos a + \sin a)$$

$$= (\cos a + \sin a)(\sin^6 a + \cos^4 a - 1)$$

$$= (\cos a + \sin a)[\sin^6 a + (\cos^2 a - 1)(\cos^2 a + 1)]$$

$$= (\cos a + \sin a)[\sin^6 a - \sin^2 a(\cos^2 a + 1)]$$

$$= \sin^2 a(\cos a + \sin a)(\sin^4 a - \cos^2 a - 1) = \sin^2 a(\cos a + \sin a)(\sin^4 a + \sin^2 a - 2).$$

Bài tập 13. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta có $2 - 2\cos x = 2(1 - \cos x) = 4\sin^2\frac{x}{2}$ suy ra:

$$\sqrt{2 - 2\cos x} = \sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}} \overset{0 \le \frac{x}{2} \le \pi}{=} 2\sin\frac{x}{2}$$

$$\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2\cos x}}}_{2\text{ dấu căn}} = 2\sin\frac{x}{2^2}$$

...

$$\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - ... - \sqrt{2 - 2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}} = 2\sin\frac{x}{2^n}.$$

Vậy, ta được $A = \frac{1}{2}.2\sin\frac{x}{2^n} = \sin\frac{x}{2^n}$.

Bài tập 14. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). C.

Bài tập 15. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách biến đổi sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$A = (\cos x.\cos\frac{\pi}{3} + \sin x.\sin\frac{\pi}{3})^2 + \cos^2 x + (\cos x.\cos\frac{\pi}{3} - \sin x.\sin\frac{\pi}{3})^2$$

$$= (\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2 + \cos^2 x + (\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{2}.$$

Vậy, biểu thức A không phụ thuộc vào x.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$A = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x - \frac{2\pi}{3})] + \cos^2 x + \frac{1}{2}[1 + \cos(2x + \frac{2\pi}{3})]$$

$$= 1 + \cos^2 x + \frac{1}{2}[\cos(2x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{2\pi}{3})]$$

$$= 1 + \cos^2 x + \cos 2x.\cos\frac{2\pi}{3} = 1 + \cos^2 x - \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) = \frac{3}{2}.$$

Bài tập 16. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). C.

Bài tập 17. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B.

Bài tập 18. Nhận xét rằng $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình:

$$7x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $a = \cos\frac{\pi}{7}$, $b = \cos\frac{3\pi}{7}$, $c = \cos\frac{5\pi}{7}$ làm nghiệm bằng cách:

$$(1) \Leftrightarrow 4x = \pi - 3x + 2k\pi \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 3x + 2k\pi)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = -\cos 3x \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 3\cos x - 4\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^4 x + 4\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0.$$

Từ đó, theo định lí Viét ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \\ ab + bc + ca = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\ abc = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

a. **Đáp số trắc nghiệm D.**

Lời giải tự luận: Ta suy ra:

$$A = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

b. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Ta suy ra:

$$B = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7} = a^4 + b^4 + c^4$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = \frac{13}{16}.$$

Bài tập 19. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 20. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết suy ra:

$$m.n = (\cos a + \cos b)(\sin a + \sin b)$$
$$= (\sin a.\cos b + \sin b.\cos a) + (\sin a.\cos a + \sin b.\cos b)$$
$$= \sin(a + b) + \frac{1}{2}(\sin 2a + \sin 2b) = \sin(a + b) + \sin(a + b).\cos(a - b)$$
$$= [1 + \cos(a - b)]\sin(a + b). \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có thể biến đổi giả thiết như sau:

$$\begin{cases}(\cos a + \cos b)^2 = m^2\\ (\sin a + \sin b)^2 = n^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow m^2 + n^2 = (\cos^2 a + \sin^2 a) + 2(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b) + (\cos^2 b + \sin^2 b)$$
$$= 2 + 2\cos(a - b)$$
$$\Rightarrow \cos(a - b) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 2). \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$m.n = [1 + \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 2)]\sin(a + b) \Leftrightarrow \sin(a + b) = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Bài tập 21. Nhân cả hai vế của đẳng thức với $\sin\frac{a}{2}$.

Bài tập 22. Kí hiệu các đẳng thức cần chứng minh theo thứ tự là (1), (2), (3), (4), (5), (6).

a. Ta có:

$$VT = \sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A + B}{2}.\cos\frac{A - B}{2} + \sin C$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A - B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2} = 2(\cos\frac{A - B}{2} + \cos\frac{A + B}{2})\cos\frac{C}{2}$$
$$= 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

b. Ta có:

$$VT = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C$$
$$= 2\cos\frac{A + B}{2}.\cos\frac{A - B}{2} + \cos C = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}).\cos\frac{A - B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + (1 - 2\sin^2\frac{C}{2}) = 1 - 2\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2})$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}[\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}) - \cos\frac{A-B}{2}]$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C \Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan A + \tan B = (1 - \tan A.\tan B)\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C.$$

Cách 2: Sử dụng đẳng thức 4:

$$\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan A.\tan B} + \frac{1}{\tan B.\tan C} + \frac{1}{\tan C.\tan A} = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C.$$

d. Sử dụng đẳng thức 3, ta có:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B} + \frac{1}{\cot C} = \frac{1}{\cot A.\cot B.\cot C}$$

$$\Leftrightarrow \cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1.$$

e. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1.$$

Cách 2: Sử dụng đẳng thức 6 – *Bạn đọc tự làm.*

f. Ta có:

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{C}{2}.\cot\frac{A}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}.$$

Bài tập 23. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B.

Bài tập 24.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Hàm số xác định với mọi x.

Ta đi tìm điều kiện của y để phương trình

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} = y \text{ có nghiệm đối với ẩn x.}$$

Phương trình được chuyển về dạng:

$$3\sin x - y\cos x = 2y \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$3^2 + (-y)^2 \geq (2y)^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}.$$

Ta có kết luận:

- $y_{\max} = \sqrt{3}$ đạt được khi

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

- $y_{\min} = -\sqrt{3}$ đạt được khi

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta đi tìm y để phương trình:

$$y = \frac{\sin x}{2+\cos x} \text{ có nghiệm đối với ẩn x.}$$

Phương trình được chuyển về dạng:

$$\sin x - y\cos x = 2y. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi:

$$1^2 + y^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác vì $x \in [0, \pi]$ nên $y \geq 0$, do đó điều kiện thu được là $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có kết luận:

- $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ đạt được khi:

$$\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{2\pi}{3}.$$

- $y_{\min} = 0$ đạt được khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$.

Bài tập 25. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$\begin{cases}1+2\cos x \geq 0\\ 1+2\sin x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpki ta có:

$$y^2 = (\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x})^2 \leq (1+1)[2+2(\sin x + \cos x)]$$

$$= 4 + 4\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 4 + 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} \leq 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

suy ra $\text{Max}y = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$, đạt được khi:

$$\begin{cases}\sqrt{1+2\cos x} = \sqrt{1+2\sin x}\\ \sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 26.

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\sin(\pi\cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2} + 2k\right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\cos(\pi\cos 3x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cos 3x = 2k\pi \Leftrightarrow \cos 3x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|2k| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 27.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$\cos[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)] \neq 0. \quad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1 + 4k| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4} \le k \le \frac{\sqrt{2}-1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2l\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \end{array}\right., l \in \mathbb{Z} \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Điều kiện $\sin[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] \ne 0.$ (**)

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1 + 4k| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4} \le k \le \frac{\sqrt{2}-1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2l\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{array}\right., l \in \mathbb{Z} \text{ thoả mãn } (**).$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 28. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.

Bài tập 29. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). A.

Bài tập 30. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C.

Bài tập 31. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B.

Bài tập 32. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, thay vào phương trình ta được:

$$(m - 1)\sin(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) = 1 \text{ luôn đúng}$$

Vậy $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là một họ nghiệm của phương trình.

Trường hợp 2: Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{2(m-1)t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow (m-1)t = 1. \quad (2)$$

a. Đáp số trắc nghiệm B.

b. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Với $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì $t \in [-1, 1]$.

Do vậy, để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ điều kiện là phương trình (2) có nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -1 \leq \dfrac{1}{m-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq 0 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 33. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A.

Bài tập 34. Nhận xét rằng $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$3\tan^2 x + 2m.\tan x - 1 = 0.$$

Đặt $t = \tan x$, phương trình có dạng:

$$3t^2 + 2mt - 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Với $m = 0$, ta được:

$$3t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \pm\tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Để phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3 \geq 0$, luôn đúng.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 35. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C.

Bài tập 36.

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x.\cos^2 x \quad (1)$$

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

  $(1) \Leftrightarrow 6\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$ mâu thuẫn.

  Vậy phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được

  $$6(1 + \tan^2 x)\tan x - 2 = 10\tan x \Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x - 1 = 0$$

  $$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(3\tan^2 x + 3\tan x + 1) = 0$$

  $$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ vi phạm điều kiện } (*).$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 37. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.

Bài tập 38. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - m)(\frac{1}{\cos^2 x} - 1) - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m).\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} + 4m = 0$$

Đặt $t = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t| \geq 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = (1 - m)t^2 - 2t + 4m = 0. \qquad (1)$$

a. Đáp số trắc nghiệm C.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Với $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow t > 1$.

Để phương trình có nhiều hơn một nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm thoả mãn $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(1) > 0 \\ S/2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 > 0 \\ (1 - m)(3m - 1) > 0 \\ \dfrac{1}{1 - m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in (\frac{1}{3}, 1) \backslash \{\frac{1}{2}\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 39.

a. **Đáp số trắc nghiệm C.**

Lời giải tự luận: **Đặt** $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10} = \pi - 3t$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin(\pi - 3t) = 3\sin t \Leftrightarrow \sin 3t = 3\sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. **Đáp số trắc nghiệm A** – *Hướng dẫn*: **Đặt** $t = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.

Bài tập 40. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 41. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). A.

Bài tập 42.

a. **Đáp số trắc nghiệm B.**

b. **Đáp số trắc nghiệm D.**

Lời giải tự luận: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sin^2 x - \sin x.\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0. \qquad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 theo sinx, ta có:

$$\Delta = \sin^4 3x - \sin^2 3x = (\sin^2 3x - 1)\sin^2 3x \le 0,\ \forall x$$

do đó, được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 3x = 0 \end{array}\right. \\ \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^2 3x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^2 3x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 3\sin x - 4\sin^3 x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin^2 x - 4\sin x.\sin^2 3x + \sin^4 3x - \sin^4 3x + \sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - \sin^2 3x)^2 + (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sin^2 3x = 0 \\ (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0 \end{cases}$$ – *Học sinh tự giải tiếp.*

Bài tập 43. Đáp số trắc nghiệm C.

Bài tập 44. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta có nhận xét:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos^{13}x \le \cos^2 x\\ \sin^{14}x \le \sin^2 x\end{array}\right. \Rightarrow \text{VT} = \cos^{13}x + \sin^{14}x \le \cos^2x + \sin^2x = 1$$

do đó, phương trình tương đương với hệ:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos^{13}x = \cos^2 x\\ \sin^{14}x = \sin^2 x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \pm 1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = 2k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 45. Điều kiện:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos x \ne 0\\ \sin x \ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$|\text{VT}| = |(\tan x + \frac{1}{4}\cot x)^n| = (|\tan x| + \frac{1}{4}|\cot x|)^n \overset{\text{Côsi}}{\ge} (2\sqrt{\frac{1}{4}|\tan x|.|\cot x|})^n = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos^n x \le \cos^2 x\\ \sin^n x \le \sin^2 x\end{array}\right. \Rightarrow \text{VT} = \sin^n x + \cos^n x \le \cos^2x + \sin^2x = 1$$

do đó, phương trình tương đương với hệ:

$$\left[\begin{array}{l}\text{VT} = \text{VP} = 1\\ \text{VT} = \text{VP} = -1\end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{VT} = 1\\ n = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\tan x = \dfrac{1}{4}\cot x\\ n = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\tan^2 x = \dfrac{1}{4}\\ n = 2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\tan x = \pm\dfrac{1}{2} = \pm\tan\alpha\\ n = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = \pm\alpha + k\pi\\ n = 2\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm và với n = 2.

ĐỀ SỐ 1

Câu I. Ta có a), c), d) là đúng và b) sai.

Câu II. Hàm số f(x) là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ bởi:

$$f(x + T) = f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2x = f(x).$$

Câu III. Ta biến đổi:

$$A = \cos 8x.\cot 4x - \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2\cos 2x.\sin 2x} = \cos 8x.\frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$= (\cos 8x - 1)\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -2\sin^2 4x.\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -2\sin 4x.\cos 4x = -\sin 8x.$$

Câu IV.

a. Ta biến đổi:

$$\sin(\pi\sin 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi\sin 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2} + 2k\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$$

b. *Hướng dẫn*: Đặt t = tanx. Từ đó, suy ra nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

ĐỀ SỐ 2

Câu I. Ta có:

- Hàm $\cot\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì 2π.
- Hàm $\tan\frac{x}{4}$ tuần hoàn với chu kì 4π.

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu II. Hàm số xác định trên tập D = **R**, là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = |-x|.\cos(-x) = |x|.\cos x = f(x)$.

Vậy, f(x) là hàm số chẵn.

Câu III. Ta biến đổi:

$$A = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x}.\tan x = \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos x.\sin x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x.$$

Câu IV. Đặt t = cosx, điều kiện $|t| \le 1$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - (2m + 1)t + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \cos x = m \quad (*) \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$$

a. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

b. Để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ điều kiện là:

(*) có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$.

Vậy, với $-1 \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHƯƠNG II

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§ 1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. QUY TẮC CỘNG

Quy tắc cộng: *Giả sử một công việc có thể tiến hành theo một trong* k *phương án* $A_1, A_2, ..., A_k$. *Nếu:*

- *Phương án* A_1 *có thể làm bằng* n_1 *cách.*
- *Phương án* A_2 *có thể làm bằng* n_2 *cách.*
- ...
- *Phương án* A_k *có thể làm bằng* n_k *cách.*

Khi đó, có công việc có thể thực hiện theo $n_1 + n_2 + ... + n_k$ *cách.*

Biểu diễn dưới dạng tập hợp: Quy tắc cộng thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

1. Nếu A, B là hai tập hữu hạn, không giao nhau, thì:
$$|A + B| = |A| + |B|.$$
2. Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là k tập hữu hạn, từng đôi một không giao nhau, thì:
$$|A_1 + A_2 + ... + A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k|.$$
3. Nếu A, B là hai tập hữu hạn và $A \subseteq B$, thì:
$$|\overline{A}| = |B \setminus A| = |B| - |A|.$$

2. QUY TẮC NHÂN

Quy tắc nhân: *Giả sử một công việc A bao gồm k công đoạn* $A_1, A_2, ..., A_k$. *Nếu:*

- *Công đoạn* A_1 *có thể làm bằng* n_1 *cách.*
- *Công đoạn* A_2 *có thể làm bằng* n_2 *cách.*
- ...
- *Công đoạn* A_k *có thể làm bằng* n_k *cách.*

Khi đó, có công việc có thể thực hiện theo $n_1.n_2...n_k$ *cách.*

Biểu diễn quy tắc nhân dưới dạng tập hợp: Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

> *Nếu* $A_1, A_2, ..., A_m$ *là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề - các của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích Đề - các* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ *được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của*

A_1 một phần tử của A_2, ..., một phần tử của A_m. Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1| . |A_2| ... |A_m|.$$

3. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là nguyên lý bù trừ.

Biểu diễn dưới dạng tập hợp: Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý bù trừ bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho A_1, A_2 là các tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn một phần tử của A_1 còn T_2 là việc chọn một phần tử của A_2.

- Có $|A_1|$ cách làm việc T_1.
- Có $|A_2|$ cách làm việc T_2.

Số cách làm hoặc T_1 hoặc T_2 bằng tổng số cách làm việc T_1 và số cách làm việc T_2 trừ đi số cách làm cả hai việc. Vì có $|A_1 \cup A_2|$ cách làm hoặc T_1 hoặc T_2, và có $|A_1 \cap A_2|$ cách làm cả hai việc T_1 và T_2 nên chúng ta có:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Đó chính là công thức đưa ra để xác định số các phần tử của hợp hai tập hợp. Nguyên lý bù trừ có thể tổng quát hoá để tìm số cách thực hiện nhiệm vụ gồm n việc khác nhau, hoặc là tìm số phần tử của hợp n tập hợp với n là số nguyên dương.

Bài toán 1: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm phương án.

Phương pháp chung

1. Để sử dụng quy tắc cộng trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách các phương án thành k nhóm độc lập với nhau:

$$A_1, A_2, ..., A_k.$$

Bước 2: Nếu:

- A_1 có n_1 cách khác nhau.
- A_2 có n_2 cách khác nhau.

...

- A_k có n_k cách khác nhau.

Bước 3: Khi đó, ta có tất cả:

$$n_1 + n_2 + ... + n_k \text{ phương án.}$$

2. Để sử dụng quy tắc nhân trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách một hành động A thành k công việc nhỏ liên tiếp:

$$A_1, A_2, ..., A_k.$$

Bước 2: Nếu ta có:

- n_1 cách khác nhau để thực hiện A_1.
- Một khi thực hiện xong A_1, ta có n_2 cách thực hiện A_2.

...

- Một khi thực hiện xong $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$, ta có n_k cách thực hiện A_k.

Bước 3: Khi đó ta có tất cả:

$n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ cách để thực hiện hành động A.

Bài toán 2: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A.

Phương pháp chung

1. Sử dụng quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số gồm k chữ số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Một số gồm k chữ số hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{\alpha_1 ... \alpha_k}, \text{ với } \alpha_i \in A, i = \overline{1,k} \text{ và } \alpha_1 \neq 0.$$

Bước 2: Đếm số cách chọn cho các α_i, $i = \overline{1,k}$ (không nhất thiết phải theo thứ tự), giả sử bằng n_i.

Bước 3: Khi đó, số các số gồm k chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$n_1.n_2...n_k$.

2. Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chia tập các số cần đếm thành các tập con $A_1, A_2, ...$ độc lập với nhau (không giao nhau).

Bước 2: Sử dụng quy tắc nhân đếm số phần tử của các tập $A_1, A_2, ...$, giả sử bằng $k_1, k_2, ...$

Bước 3: Khi đó, số các số hình thành từ tập A bằng:

$k_1 + k_2 + ...$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Một bé có thể mang họ cha là Lê hay họ mẹ là Đỗ, chữ lót có thể là Văn, Hữu, Hồng, Bích hoặc Đình, còn tên có thể là Nhân, Nghĩa, Trí, Đức, Ngọc hoặc Dũng. Hỏi có bao nhiêu cách để đặt tên họ cho bé.

A. 2 cách. **B.** 10 cách. **C.** 30 cách. **D.** 60 cách.

Bài tập 2: Một nhóm sinh viên gồm n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho nam và nữ đứng xen nhau?

A. $(n!)^2$. **B.** $2(n!)$. **C.** $2(n!)^2$. **D.** $(2n)!$.

Bài tập 3: Có tất cả 3 đường đi từ trường Lê Hồng Phong đến trường Nguyễn Thị Minh Khai và 4 đường đi từ trường Lê Hồng Phong đến trường Lê Quý Đôn. Vậy có tất cả mấy cách đi khác nhau từ trường Lê Quý Đôn đến trường Nguyễn Thị Minh Khai qua ngã trường Lê Hồng Phong.

A. 6 cách. **B.** 8 cách. **C.** 12 cách. **D.** 24 cách.

Bài tập 4: Có bao nhiêu số chẵn, lớn hơn 5000, gồm 4 chữ số khác nhau.

A. 1208 số. **B.** 1088 số. **C.** 1288 số. **D.** 1008 số.

Bài tập 5: Với 4 chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt.

A. 16 số. **B.** 24 số. **C.** 32 số. **D.** 64 số.

Bài tập 6: Với 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số phân biệt.

A. 27216 số. **B.** 7216 số. **C.** 2216 số. **D.** 2716 số.

Bài tập 7: Từ 7 chữ số 0, 1,..., 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau.

A. 1260 số. **B.** 360 số. **C.** 900 số. **D.** 440 số.

Bài tập 8: Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn có năm chữ số sao cho trong mỗi chữ số đó mỗi chữ số trên có mặt một lần.

A. 24 số. **B.** 36 số. **C.** 60 số. **D.** 82 số.

Bài tập 9: Cho 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau lớn hơn 500.000 xây dựng từ 10 chữ số đó.

A. 20160 số. **B.** 16800 số. **C.** 39600 số. **D.** 36960 số.

Bài tập 10: Giả sử $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số nguyên tố khác nhau. Hỏi có bao nhiêu ước số của số $q = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$.

A. $k_1k_2... k_n$ ước số. **C.** $(k_1 - 1)(k_2 - 1)... (k_n - 1)$ ước số.

B. $k_1 + k_2 + ... k_n$ ước số. **D.** $(k_1 + 1)(k_2 + 1)... (k_n + 1)$ ước số.

§ 2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HOÁN VỊ

Định nghĩa: *Cho tập hợp* A, *gồm* n *phần tử* (n ≥ 1). *Một cách sắp thứ tự* n *phần tử của tập hợp* A *được gọi là một hoán vị của* n *phần tử đó.*

Định lí: *Nếu kí hiệu số hoán vị của* n *phần tử là* P_n, *thì ta có*:

$$P_n = n! = 1.2.3...(n-1).n.$$

2. CHỈNH HỢP

Định nghĩa: *Cho tập hợp* A *gồm* n *phần tử. Một bộ gồm* k (1 ≤ k ≤ n) *phần tử sắp thứ tự của tập hợp* A *được gọi là một chỉnh hợp chập* k *của* n *phần tử của* A.

Định lí: *Nếu kí hiệu số chỉnh hợp chập* k *của* n *phần tử là* A_n^k, *thì ta có*:

$$A_n^k = n.(n-1)...(n-k+1).$$

Chú ý:

1. Ta có thể viết A_n^k theo cách khác:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Nếu k = n thì: $A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$.

Như vậy, một chỉnh hợp n chập n được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Từ đó, suy ra:

$$A_n^n = A_n^k . A_{n-k}^{n-k}, \text{ với mọi } 1 \le k \le n.$$

Kết quả này được phát biểu là "*Số các hoán vị của n phần tử phân biệt bằng số các chỉnh hợp n chập r của các phần tử đó, nhân với số các hoán vị của (n − r) phần tử còn lại* ".

3. TỔ HỢP

Định nghĩa: *Cho tập hợp* A *gồm* n *phần tử. Một tập con của* E, *gồm* k *phần tử phân biệt* (1 ≤ k ≤ n), *được gọi là một tổ hợp chập* k *của* n *phần tử của* A.

Định lí: *Nếu kí hiệu số tổ hợp chập* k *của* n *phần tử là* C_n^k, *thì ta có*:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, \quad (1)$$

với $0 \le k \le n$ và quy ước $C_n^0 = 1$.

Từ đó suy ra:

1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, với $0 \le k \le n$. (2)
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$, với $0 \le k \le n$. (3)
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, với $0 \le k \le n$. (4)

Bài toán 1: Rút gọn biểu thức chứa các toán tử về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Phương pháp chung

Để thực hiện việc rút gọn biểu thức chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta thường sử dụng công thức phân tích, ngoài ra trong nhiều trường hợp cần vận dụng kĩ năng đơn giản dần.

Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Phương pháp chung

Để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta thường sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi.

Cách 2: Sử dụng các đánh giá về bất đẳng thức.

Cách 3: Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp.

Bài toán 3: Giải phương trình, bất phương trình và hệ chứa các toán tử về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Phương pháp chung

Để giải phương trình, bất phương trình chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện việc đơn giản biểu thức hoán vị để chuyển phương trình, bất phương trình về dạng đại số quen thuộc.

Cách 2: Đánh giá thông qua giá trị cận trên hoặc cận dưới.

Bài toán 4: Thực hiện bài toán đếm.

Phương pháp chung

1. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:
   - Tất cả n phần tử đều có mặt.
   - Mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.
   - Có phân biệt thứ tự giữa các phần tử.
2. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:
   - Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
   - Có phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.
3. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:
   - Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
   - Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 11: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{3!(m-1)!}$.

A. $A = 5$. **B.** $A = 10$. **C.** $A = 15$. **D.** $A = 20$.

b. $B = \left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2$.

A. $B = 24$. **B.** $B = 42$. **C.** $B = 64$. **D.** $B = 81$.

c. $C = (P_n)^3 . C_n^n C_{2n}^n C_{3n}^n$.

A. $C = n!$. **B.** $C = 2n!$. **C.** $C = 3n!$. **D.** $C = 4n!$.

Bài tập 12: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0$.

A. $A = 81$. **B.** $A = 72$. **C.** $A = 39$. **D.** $A = 33$.

b. $B = \frac{6!}{(m-2)(m-3)}\left[\frac{1}{(m+1)(m-4)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-5)!.5!} - \frac{(m-1)!.m}{12(m-4)!.3!}\right]$

với $m = 101$.

A. $B = -40400$. **B.** $B = -40300$. **C.** $B = -30400$. **D.** $B = -30300$.

c. $C = \dfrac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \dfrac{A_3^2}{P_2}$.

A. $C = 1$. **B.** $C = 3$. **C.** $C = 4$. **D.** $C = 7$.

Bài tập 13: Chứng minh rằng:

a. $1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n! < (n + 1)!$.

b. $n^n < (n!)^2 < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$, với $n \in \mathbf{Z}, n > 2$.

c. $P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2 = nk! A_{n+5}^5$.

Bài tập 14: Chứng minh rằng:

a. $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

b. $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$.

c. $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$.

Bài tập 15: Giải các phương trình sau:

a. $P_2x^2 - P_3x = 8$.

A. $x = -1$ và $x = 4$. **C.** $x = -2$ và $x = 4$.

B. $x = -1$ và $x = 1$. **D.** $x = -2$ và $x = 2$.

b. $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

A. $x = -3$ và $x = 4$. **C.** $x = 3$ và $x = -4$.

B. $x = 3$ và $x = 4$. **D.** $x = -3$ và $x = -4$.

c. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + ... + C_x^{x-10} = 1023$.

A. $x = 8$. **B.** $x = 10$. **C.** $x = 12$. **D.** $x = 16$.

Bài tập 16: Tìm các số n nguyên dương thoả mãn:

a. $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$.

A. $n = 1, n = 2$ và $n = 3$. **C.** $n = 3, n = 4$ và $n = 5$.

B. $n = 2, n = 3$ và $n = 4$. **D.** $n = 1, n = 4$ và $n = 8$.

b. $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4} A_{n-2}^2 < 0, n \in \mathbf{Z}$.

A. $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **C.** $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

B. $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. **D.** $n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Bài tập 17: Định x và y sao cho:

a. $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$.

A. (1; 4). **B.** (4; 1). **C.** (3; 8). **D.** (8; 3).

b. $(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1$.

A. (2; 1). **B.** (2; 2). **C.** (3; 7). **D.** (7; 3).

Bài tập 18: Có bao nhiêu cách xếp 6 người ngồi xung quanh một bàn tròn có 6 chỗ, hai cách ngồi được xem là như nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách quay bàn đi một góc nào đó ?

A. 720. **B.** 120. **C.** 24. **D.** 12.

Bài tập 19: Một người chồng và một người vợ mời 24 người khách dự tiệc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho chồng luôn luôn ngồi ở vị trí đối diện với người vợ ?

A. 80192. **B.** 19200. **C.** 8019200. **D.** 5748019200.

Bài tập 20: Giả sử rằng có tám vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra ?

A. 336. **B.** 364. **C.** 633. **D.** 436.

Bài tập 21: Bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và ba trong cuộc đua có 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự tới đích đều có thể ?

A. 132. **B.** 120. **C.** 320. **D.** 1320.

Bài tập 22: Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a. Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực ?

A. 26501. **B.** 26150. **C.** 21650. **D.** 12650.

b. Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ ?

A. 33600. **B.** 303600. **C.** 30360. **D.** 30300.

Bài tập 23: Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 uỷ viên trong đó số uỷ viên nam bằng số uỷ viên nữ.

A. 546000. **B.** 54600. **C.** 5460. **D.** 546.

Bài tập 24: Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ từ bảng chữ cái tiếng Anh ?

A. 65780. **B.** 56780. **C.** 57680. **D.** 57860.

Bài tập 25: Một tập hợp 100 phần tử có bao nhiêu tập con có nhiều hơn hai phần tử ?

A. $2^{100} - 5051$. **B.** $2^{99} - 4041$. **C.** 2^{100}. **D.** 2^{99}.

Bài tập 26: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

a. Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số, chữ số 5 có mặt đúng 4 lần, các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần ?

A. 136080 số. **B.** 36080 số. **C.** 16080 số. **D.** 13080 số.

b. Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần và các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần ?

A. 72160 số. **B.** 22160 số. **C.** 27160 số. **D.** 272160 số.

Bài tập 27: Từ các chữ số 1, 2, 5, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 276.

A. 12 số. **B.** 18 số. **C.** 20 số. **D.** 36 số.

Bài tập 28: Cho tập hợp E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ E trong mỗi trường hợp sau:

a. Là số chẵn.

A. 3000 số. **B.** 3200 số. **C.** 3110 số. **D.** 313 số.

b. Một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

A. 2280 số. **B.** 2820 số. **C.** 2802 số. **D.** 8220 số.

Bài tập 29: Hỏi từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập thành bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

A. 42 số. **B.** 420 số. **C.** 4200 số. **D.** 42000 số.

Bài tập 30: Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

A. 126 số. **B.** 216 số. **C.** 261 số. **D.** 612 số.

§ 3. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU - TƠN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU – TƠN

Với mọi cặp số a, b và mọi số n nguyên dương, ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i}.b^i .$$

***Một số dạng đặc biệt*:**

Dạng 1: Thay a = 1 và b = x vào (1), ta được:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (2)$$

Dạng 2: Thay a = 1 và b = – x vào (1), ta được:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^k + \dots + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (3)$$

Khi đó:

- Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

- Thay x = 1 vào (3), ta được:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

2. TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của khai triển Niutơn của nhị thức $(a + b)^n$ có thể được sắp xếp thành tam giác sau đây (gọi là *tam giác Pascal*):

$n = 0$							1						
$n = 1$						1		1					
$n = 2$					1		2		1				
$n = 3$				1		3		3		1			
$n = 4$			1		4		6		4		1		
$n = 5$		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1

...

Như vậy, dựa vào bảng ta có:

$C_4^1 = C_4^3 = 4,\ C_4^2 = 6.$

$C_5^1 + C_5^2 = C_6^2$ (chúng ta đã từng được biết $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$).

Bài toán 1: Khai triển nhị thức.

Phương pháp chung

Sử dụng kết quả:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

trong đó các C_n^k, với $k = 0, 1, ..., n$ có giá trị được tính bằng công thức tổ hợp hoặc sử dụng tam giác Pascal.

Bài toán 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức.

Phương pháp chung

Sử dụng dạng khai triển Niu–tơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Các phép biến đổi đại số.

Bài toán 3: Sử dụng khai triển Niu–tơn chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp.

Phương pháp chung

Sử dụng dạng khai triển Niutơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Các phép biến đổi đại số.
- Phép đánh giá cho bất đẳng thức cùng với các phương pháp chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức đơn.

Bài toán 4: Giá trị của hệ số trong khai triển Niutơn.

Phương pháp chung

Với các yêu cầu về hệ số trong khai triển Niu–tơn, ta cần lưu ý:

1. Ta có:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i}.b^i$$

do đó hệ số của số hạng thứ i là C_n^i, và số hạng thứ i là $C_n^i a^{n-i}.b^i$.

2. Ta có: $(x^{\alpha} + x^{\beta})^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^{\alpha})^{n-i}.(x^{\beta})^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{\alpha(n-i)+\beta i}$

do đó:

- Hệ số của x^k trong khai triển trên là C_n^i với i là nghiệm của phương trình:

  $$\alpha(n - i) + \beta i = k.$$
- Đặc biệt, khi k = 0 đó chính là số hạng không phụ thuộc x.

Bài toán 5: Hệ số lớn nhất trong khai triển Niutơn.

Phương pháp chung

Để tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, ta thực hiện:

Bước 1: Ta biết rằng với k, n nguyên, không âm và $k \le n$, ta có:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ và } C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

Bước 2: Thực hiện so sánh C_n^k và C_n^{k-1}, bằng cách xét:

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k} = \frac{n+1}{k} - 1. \qquad (1)$$

Bước 3: Từ (1), suy ra:

- $C_n^{k-1} < C_n^k \Leftrightarrow \dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{k} - 1 > 1 \Leftrightarrow k < \dfrac{n+1}{2}$.
- $C_n^{k-1} > C_n^k \Leftrightarrow \dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{k} - 1 < 1 \Leftrightarrow k > \dfrac{n+1}{2}$.

Tức là:

- C_n^k tăng khi k tăng và $k < \dfrac{n+1}{2}$.
- C_n^k giảm khi k tăng và $k > \dfrac{n+1}{2}$.

Bước 4: Vậy, ta có kết luận:

- Với n lẻ, thì C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại $k = \dfrac{n+1}{2}$.
- Với n chẵn, thì C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại $k = \dfrac{n}{2}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 31: Thực hiện khai triển:

a. $\left(x + \dfrac{1}{2x}\right)^8$.   b. $\dfrac{1}{27}\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6$.

Bài tập 32: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = 2^8.3^8 C_8^0 + 2^7.3^7 C_8^1 + ... + C_8^8$.

A. 16807.   **B.** 117649.   **C.** 823543.   **D.** 5764801.

b. $B = 2^9.5^9C_9^0 - 2^8.5^8.3C_9^1 + ... + 3^9C_9^9$.

A. 117649. **B.** 823543. **C.** 5764801. **D.** 40353607.

Bài tập 33: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $S_1 = 2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + ... + C_n^n$.

A. $S_1 = \frac{3^n + 1}{2}$. **B.** $S_1 = \frac{3^n - 1}{2}$. **C.** $S_1 = \frac{3^n}{2}$. **D.** $S_1 = \frac{3^{n+1}}{2}$.

b. $S_2 = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + ... + C_n^n$.

A. $S_2 = \frac{3^n - 1}{2}$. **B.** $S_2 = \frac{3^n + 1}{2}$. **C.** $S_2 = \frac{3^n}{2}$. **D.** $S_2 = \frac{3^{n-1}}{2}$.

Bài tập 34: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - ... + (-1)^n.2^nC_n^n = (-1)^n.$$

Bài tập 35: Với n là số nguyên, dương và lớn hơn 1, chứng minh rằng:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Bài tập 36: Đặt:

$$(x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{100}x^{100}.$$

a. Tính hệ số a_{97}.

A. -1293600. **B.** 1293600. **C.** -931600. **D.** 931600.

b. Tính tổng $S_1 = a_0 + a_1 + ... + a_{100}$.

A. $S_1 = 1$. **B.** $S_1 = -1$. **C.** $S_1 = 2$. **D.** $S_1 = -2$.

Bài tập 37: Đặt:

$$(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}.$$

a. Tính hệ số a_{10}.

A. 101. **B.** 202. **C.** 303. **D.** 404.

b. Tổng $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15}$.

A. $S_1 = 1024$. **B.** $S_1 = -1024$. **C.** $S_1 = 256$. **D.** $S_1 = -256$.

c. Tổng $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15}$.

A. $S_2 = 0$. **B.** $S_2 = -1$. **C.** $S_2 = 2$. **D.** $S_2 = -2$.

Bài tập 38: Trong khai triển nhị thức $(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}})^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$$

A. C_{12}^4. **B.** C_{12}^5. **C.** C_{12}^8. **D.** C_{12}^9.

Bài tập 39: Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số $a \in \mathbf{N}$ của số hạng $a.x^{12}$ trong khai triển.

A. C_{10}^4. **B.** C_{12}^4. **C.** C_{10}^3. **D.** C_{12}^3.

Bài tập 40:

a. Tìm số hạng có giá trị lớn nhất của khai triển:

$$(p+q)^n \text{, biết rằng } p>0, q>0, p+q=1.$$

b. Áp dụng: Tìm số hạng có giá trị lớn nhất của khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^8$.

A. $\frac{1792}{2187}$. **B.** $\frac{2187}{1792}$. **C.** $\frac{792}{287}$. **D.** $\frac{287}{792}$.

§ 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. BIẾN CỐ

Định nghĩa: (*Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu*):

a. Một ***phép thử ngẫu nhiên*** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Có thể lặp đi lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau.
- Kết quả của nó không dự đoán trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

b. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô – mê – ga).

Biến cố liên quan đến phép thử: Một biến cố A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu Ω của phép thử đó. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A được gọi là một ***kết quả thuận lợi*** cho A.

2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa cổ điển của xác suất: Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan tới phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A) được xác định bởi công thức:

$$P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}, \qquad (1)$$

trong đó $|\Omega_A|$ và $|\Omega|$ lần lượt là số phần tử của tập Ω_A và Ω.

Như vậy, việc tính xác suất của biến cố A được thực hiện theo các bước:

Bước 1. Thực hiện hai phép đếm:

- Đếm số phần tử của không gian mẫu Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.

- Đếm số phần tử của tập Ω_A, tức là đếm số kết quả thuận lợi cho A.

Bước 2. Sử dụng công thức (1) để tính P(A).

Định nghĩa thống kê của xác suất: Xét phép thử T và biến cố A liên quan tới phép thử đó. Ta tiến hành lặp đi lặp lại N phép thử T và thống kê xem biến cố A xuất hiện bao nhiêu lần.

- Số lần xuất hiện biến cố A được gọi là ***tần số*** của A trong N lần thực hiện phép thử T.
- Tỉ số giữa tần số của A với số N được gọi là ***tần suất*** của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Khi số lần thử N càng lớn thì tần suất của A càng gần với một số xác định, số đó được gọi là xác suất của A theo nghĩa thống kê.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 41: Tìm tập hợp không gian mẫu của phép thử "Gieo con súc sắc".

A. $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$.　　**C.** $\Omega = \{1, 3, 5\}$.

B. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.　　**D.** $\Omega = \{2, 4, 6\}$.

Bài tập 42: Một vé số có 4 chữ số. Khi quay số, nếu vé bạn mua trùng hoàn toàn với kết quả thì sẽ nhận được giải nhất. Nếu vé bạn mua có đúng 3 chữ số trùng với 3 chữ số của kết quả (theo đúng thứ tự) thì sẽ nhận được giải nhì. Bạn Hiển mua một vé xổ số.

a. Tính xác suất để Hiển trúng giải nhất.

A. $\frac{1}{10}$.　　**B.** $\frac{1}{100}$.　　**C.** $\frac{1}{1000}$.　　**D.** $\frac{1}{10000}$.

b. Tính xác suất để Hiển trúng giải nhì.

A. $\frac{3}{1000}$.　　**B.** $\frac{33}{10000}$.　　**C.** $\frac{36}{10000}$.　　**D.** $\frac{39}{10000}$.

Bài tập 43: Gieo hai con súc sắc.

a. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7". Tính P(A).

A. $P(A) = \frac{7}{12}$.　　**B.** $P(A) = \frac{5}{12}$.　　**C.** $P(A) = \frac{1}{4}$.　　**D.** $P(A) = \frac{1}{6}$.

b. Gọi B là biến cố "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm". Tính P(B).

A. $P(B) = \frac{7}{36}$.　　**B.** $P(B) = \frac{11}{36}$.　　**C.** $P(B) = \frac{17}{36}$.　　**D.** $P(B) = \frac{19}{36}$.

Bài tập 44: Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ ta được một xấp bài. Tính xác suất để trong xấp bài này chứa hai bộ đôi.

A. $\frac{123552}{C_{52}^5}$.　　**B.** $\frac{123525}{C_{52}^5}$.　　**C.** $\frac{123255}{C_{52}^5}$.　　**D.** $\frac{122355}{C_{52}^5}$.

Bài tập 45: Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ ta được một xấp bài. Tính xác suất để trong xấp bài này 5 quân lập thành một bộ tiến liên tiếp (là các bộ (A–2–3–4–5), (2–3–4–5–6),..., (10–J–Q–K–A)).

A. $\dfrac{10204}{C_{52}^{5}}$. **B.** $\dfrac{10240}{C_{52}^{5}}$. **C.** $\dfrac{10024}{C_{52}^{5}}$. **D.** $\dfrac{10420}{C_{52}^{5}}$.

§ 5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

Định nghĩa biến cố hợp: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là ***hợp của hai biến cố*** A và B.

Nếu gọi Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là ***hợp của*** k ***biến cố*** đó.

Định nghĩa biến cố xung khắc: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Quy tắc cộng xác suất:

1. Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
2. Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc với nhau thì xác suất để ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra là:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

Định nghĩa biến cố đối: Cho biến cố A khi đó biến cố "không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của A.

Ta có kết quả sau: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

Định nghĩa biến cố giao: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là ***giao của hai biến cố*** A và B.

Nếu gọi Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2A_k$, được gọi là ***giao của*** k ***biến cố*** đó.

Định nghĩa biến cố độc lập: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. k biến cố này được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của các biến cố còn lại.

Quy tắc nhân xác suất:

1. Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì xác suất để A và B xảy ra là:
$$P(AB) = P(A).P(B).$$
2. Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập với nhau thì:
$$P(A_1A_2A_k) = P(A_1).P(A_2).P(A_k).$$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 46: Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

A. $\frac{11}{18}$. **B.** $\frac{13}{18}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{17}{18}$.

Bài tập 47: Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để:

a. Chọn được 2 viên bi cùng màu.

A. $\frac{1}{18}$. **B.** $\frac{5}{18}$. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{11}{18}$.

b. Chọn được 2 viên bi khác màu.

A. $\frac{17}{18}$. **B.** $\frac{13}{18}$. **C.** $\frac{11}{18}$. **D.** $\frac{7}{18}$.

Bài tập 48: Một chiếc máy bay có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và II chạy tốt tương ứng là 0,8 và 0,7. Tính xác suất để:

a. Cả hai động cơ đều chạy tốt

A. 0,56. **B.** 0,056. **C.** 0,0056. **D.** 0,00056.

b. Ít nhất một động cơ chạy tốt

A. 0,96. **B.** 0,94. **C.** 0,84. **D.** 0,86.

Bài tập 49: Tính xác suất để khi gieo con súc sắc 6 lần độc lập, không lần nào xuất hiện mặt có số chấm là số chẵn.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Bài tập 50: Có ba bình A, B, C mỗi bình chứa 3 quả cầu trắng, 3 quả cầu xanh và 3 quả cầu đỏ. Từ mỗi bình lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để:

a. Ba quả cầu có màu đôi một khác nhau.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

b. Ba quả cầu có màu giống nhau.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** $\frac{1}{18}$.

§ 6. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- ***Định nghĩa***: Xác suất của biến cố B được tính trong điều kiện biến cố A đã xảy ra, kí hiệu là $P(B|A)$, được gọi là ***xác suất của*** B ***với điều kiện*** A.

Với hai biến cố A, B bất kì, ta có:

$$P(AB) = P(A).P(B|A).$$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 51: Một hộp đựng 8 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. An lấy ngẫu nhiên 1 viên bi (lấy xong không trả lại vào hộp). Tiếp đó đến lượt Bình lấy ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để Bình lấy được viên bi xanh, nếu biết rằng An đã lấy được viên bi đỏ.

A. $\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Bài tập 52: Gieo hai con súc sắc cân đối. Gọi A là biến cố "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 5 chấm" và B là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 7". Tính $P(B|A)$.

A. $\frac{1}{11}$. **B.** $\frac{2}{11}$. **C.** $\frac{5}{11}$. **D.** $\frac{7}{11}$.

Bài tập 53: Cho $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{9}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$. Hãy tính:

a. $P(\overline{A}B)$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

b. $P(B|\overline{A})$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Bài tập 54: Xác suất để một học sinh thi đỗ đại học lần đầu là 0,6. Nếu thi trượt thì học sinh đó thi lại và xác suất đỗ của lần thi lại là 0,75. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất để anh ta:

a. Không thi đỗ lần đầu.

A. 0,6. **B.** 0,5. **C.** 0,4. **D.** 0,1.

b. Thi đỗ.

A. 0,6. **B.** 0,5. **C.** 0,7. **D.** 0,9.

Bài tập 55: Cho hai hộp A và B. Hộp A chứa 10 viên bi trong đó có 3 viên bi trắng và 7 viên bi đen. Hộp B chứa 12 viên bi trong đó có 4 viên bi trắng và 8 viên bi đen. Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một viên bi. Tính xác suất để lấy được viên bi trắng.

A. $\frac{19}{60}$. **B.** $\frac{17}{55}$. **C.** $\frac{13}{50}$. **D.** $\frac{11}{40}$.

§ 7. PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: Đại lượng X được gọi là một ***biến ngẫu nhiên rời rạc*** nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó, và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

Với hai biến cố A, B bất kì, ta có:

$$P(AB) = P(A).P(B|A).$$

2. PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Khi đó bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

trong đó $P(X = x_k) = p_k$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Lưu ý: Trong bảng trên luôn có $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 56: Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc đoạn [1; 4] ?

A. Có. **B.** Không.

Bài tập 57: Gieo đồng xu 5 lần liên tiếp. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt ngửa. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không ?

A. Có. **B.** Không.

Bài tập 58: Một cuộc điều tra được tiến hành bằng cách chọn ngẫu nhiên một học sinh trong một trường học và hỏi xem lớp của bạn có bao nhiêu người. Gọi X là số học sinh trong lớp học của bạn đó. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không ?

A. Có. **B.** Không.

Bài tập 59: Một hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Gọi X là số viên bi đỏ trong 3 viên bi được chọn ra. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Bài tập 60: Số vụ vi phạm luật giao thông trên đoạn đường A vào tối thứ 6 hàng tuần là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Biết rằng, nếu có hơn 2 vụ tai nạn giao thông thì phải tăng cường thêm công an.

a. Tính xác suất để phải tăng cường thêm công an trực trên đoạn đường A vào tối thứ 6.

A. 0,15. **B.** 0,25. **C.** 0,35. **D.** 0,45.

b. Tính xác suất để có ít nhất một vụ tai nạn giao thông trên đoạn đường A vào tối thứ 6.

A. 0,25. **B.** 0,55. **C.** 0,75. **D.** 0,85.

§ 8. KÌ VỌNG, PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. KÌ VỌNG

Định nghĩa: Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. ***Kì vọng*** của X, kí hiệu là E(X) là một số được tính theo công thức:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k . p_k ,$$

trong đó $p_k = P(X = x_K)$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Ý nghĩa: E(X) là một con số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X.

2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Định nghĩa: Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

a. ***Phương sai*** của X, kí hiệu là D(X) là một số được tính theo công thức:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 . p_k ,$$

trong đó $p_k = P(X = x_K)$ với $k = 1, 2, ..., n$ và $\mu = E(X)$.

b. Căn số học bậc hai của phương sai, kí hiệu là σ(X) được gọi là ***độ lệch chuẩn*** của X. Ta có:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Ý nghĩa: D(X) là một số không âm, nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán này càng lớn.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 61: Phát biểu định nghĩa và nêu ý nghĩa của kì vọng.

Bài tập 62: Phát biểu định nghĩa và nêu ý nghĩa của phương sai.

Bài tập 63: Phát biểu định nghĩa của độ lệch chuẩn.

Bài tập 64: Gieo con súc sắc cân đối ba lần. Gọi X là số lần con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.

a. Lập bảng phân bố xác suất của X.

b. Tính E(X).

A. $E(X) = 0{,}1$. **B.** $E(X) = 0{,}3$. **C.** $E(X) = 0{,}5$. **D.** $E(X) = 0{,}7$.

c. Tính D(X).

A. $D(X) = \frac{7}{12}$. **B.** $D(X) = \frac{5}{12}$. **C.** $D(X) = \frac{1}{4}$. **D.** $D(X) = \frac{1}{12}$.

Bài tập 65: Xác suất bắn trúng vòng 10 của An là 0,4. An bắn 4 lần. Gọi X là số lần trúng vòng 10.

a. Lập bảng phân bố xác suất của X.

b. Tính E(X).

A. $E(X) = 1{,}2$. **B.** $E(X) = 1{,}3$. **C.** $E(X) = 1{,}5$. **D.** $E(X) = 1{,}7$.

c. Tính D(X).

A. $D(X) = 0{,}92$. **B.** $D(X) = 0{,}72$. **C.** $D(X) = 0{,}62$. **D.** $D(X) = 0{,}52$.

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG II

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (2 điểm): Rút gọn biểu thức:

$$A = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + \ldots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}.$$

Câu II. (2 điểm): Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a. **(1 điểm):** Từ tập A có thể lập được bao nhiêu được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi số luôn có mặt hai chữ số 1 và 7 ?

A. 2005. **B.** 2500. **C.** 2050 **D.** 2000.

b. **(1 điểm):** Trong các số tìm được ở câu a) có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 7 đứng kề nhau, chữ số 1 bên trái chữ số 7 ?

A. 120. **B.** 220. **C.** 320. **D.** 420.

Câu III. (2 điểm): Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = 2^8.3^8C_8^0 + 2^7.3^7C_8^1 + \ldots + C_8^8.$$

A. 16807. **B.** 117649. **C.** 823543. **D.** 5764801.

Câu IV. (4 điểm): Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để:

a. (2 điểm): Số được chọn là số nguyên tố.

A. 0,75. **B.** 0,5. **C.** 0,3. **D.** 0,25.

b. (2 điểm): Số được chọn chia hết cho 3.

A. 0,25. **B.** 0,45. **C.** 0,5. **D.** 0,75.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (2 điểm): Rút gọn biểu thức:

$$M = \frac{\left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2}{(P_3 - 2P_2)}.$$

Câu II. (2 điểm):

a. Cho lục giác lồi ABCDEF. Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của lục giác đã cho ? Trong đó có bao nhiêu tam giác có cạnh không phải là cạnh của lục giác ?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

b. Cùng câu hỏi như trên với bát giác lồi .

A. 4. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Câu III. (2 điểm): Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}.$$

Tìm $\max(a_1, a_2, ..., a_{12})$.

A. 162720. **B.** 127620. **C.** 126270. **D.** 126720.

Câu IV. (4 điểm): Mẹ Minh đề nghị thưởng cho Minh 90.000 đồng để mua một vật kỷ niệm nào đó, nếu Minh được điểm giỏi ở cả bốn môn học: Toán, Ngoại ngữ, Tin học, Thể dục (việc đạt điểm giỏi ở các môn là độc lập). Xác suất đạt điểm giỏi của Minh đối với bốn môn học trên tương ứng là: 0,9; 0,7; 0,8 và 0,6. Ông của Minh đề nghị mỗi môn học trên, môn nào được điểm giỏi thì thưởng 10.000 đồng.

a. (2 điểm): Tính số tiền thưởng trung bình của Minh nếu theo phương án của Mẹ.

A. 27216. **B.** 22716. **C.** 22176. **D.** 22167.

b. (2 điểm): Tính số tiền thưởng trung bình của Minh nếu theo phương án của Ông.

A. 10.000. **B.** 20.000. **C.** 30.000. **D.** 40.000.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Đáp số trắc nghiệm D.
Bài tập 2. Đáp số trắc nghiệm C.
Bài tập 3. Đáp số trắc nghiệm C.
Bài tập 4. Đáp số trắc nghiệm C.
Bài tập 5. Đáp số trắc nghiệm D.
Bài tập 6. Đáp số trắc nghiệm A.
Bài tập 7. Đáp số trắc nghiệm A.
Bài tập 8. Đáp số trắc nghiệm C.
Bài tập 9. Đáp số trắc nghiệm D.
Bài tập 10. Đáp số trắc nghiệm D.
Bài tập 11. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B; c). C.
Bài tập 12. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A; c). C.

Bài tập 13.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$(k + 1)! = (k + 1).k! = k.k! + k! \Leftrightarrow k.k! = (k + 1)! - k!.$$

Chọn lần lượt các giá trị 1, 2, 3,..., n, ta được:

$$1.1! = 2! - 1!$$
$$2.2! = 3! - 2!$$
$$3.3! = 4! - 3!$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n.n! = (n + 1)! - n!$$

Cộng n đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n! = (n + 1)! - 1 < (n + 1)!,$$ đpcm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp

- Với n = 1, ta có:

$$1.1! < (1 + 1)! \Leftrightarrow 1 < 2,$$ luôn đúng

Vậy, bất đẳng thức đúng với n = 1.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k, tức là ta có:

$$1.1! + 2.2! + ... + k.k! < (k + 1)!. \qquad (1)$$

- Ta đi chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$1.1! + 2.2! + ... + k.k! + (k + 1).(k + 1)! < (k + 2)!.$$

Thật vậy, cộng hai vế của (1) với (k + 1).(k + 1)!, ta được:

$$1.1! + 2.2! + ... + k.k! + (k + 1).(k + 1)! < (k + 1)! + (k + 1).(k + 1)!$$
$$= (k + 1)!.(k + 2) = (k + 2)!,$$ đpcm.

b. Biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$n^n < (1.2...n)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow n^n < (1.n).[2.(n-1)]...k(n-k+1)..(n.1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}.$$

- Ta có đánh giá $k(n - k + 1) \geq n$, bởi $(n - k)(k - 1) \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức trên với k = 1,...n, ta được:

$$\left.\begin{array}{l} 1.n \geq n \\ ... \\ k(n-k+1) > n \\ ... \\ n.1 \geq n \end{array}\right\} \text{n phần tử}$$

suy ra $(1.n).[2.(n - 1)]...k(n - k + 1)..(n.1) > n^n$. (1)

- Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$k(n-k+1) \le \left[\frac{k+n-k+1}{2}\right]^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức trên với k = 1,...n, ta được:

$$\left.\begin{array}{l} 1.n < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 \\ \dots \\ n.1 < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \text{n phần tử}$$

suy ra $(1.n).[2.(n-1)]...k(n-k+1)..(n.1) < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$.. (2)

Từ (1) và (2) ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh.

c. Ta có:

$$P_k A^2_{n+1} A^2_{n+3} A^2_{n+5} = k!\frac{(n+1)!}{(n-1)!}.\frac{(n+3)!}{(n+1)!}.\frac{(n+5)!}{(n+3)!}. = k!\frac{(n+5)!}{(n-1)!}$$

$$= nk!\frac{(n+5)!}{n!} = nk!A^5_{n+5}\text{, đpcm.}$$

Bài tập 14.

a. Ta có:

$$VP = n(n-1).\frac{(n-2)!}{(k-2)!.(n-k)!} = \frac{n!.k.(k-1)}{k.(k-1).(k-2)!.(n-k)!}$$

$$= k(k-1).\frac{n!}{k!.(n-k)!} = k(k-1)C^k_n\text{, đpcm.}$$

b. Áp dụng công thức biến đổi $C^r_n = C^r_{n-1} + C^{r-1}_{n-1}$, với $0 \le r \le n$.

Ta có:

$$VT = C^k_n + C^{k-1}_n + 3(C^{k-1}_n + C^{k-2}_n) + 3(C^{k-2}_n + C^{k-3}_n) + C^{k-3}_n + C^{k-4}_n$$

$$= C^k_{n+1} + 3C^{k-1}_{n+1} + 3C^{k-2}_{n+1} + C^{k-3}_{n+1}$$

$$= C^k_{n+1} + C^{k-1}_{n+1} + 2(C^{k-1}_{n+1} + C^{k-2}_{n+1}) + C^{k-2}_{n+1} + C^{k-3}_{n+1} = C^k_{n+2} + 2C^{k-1}_{n+2} + C^{k-2}_{n+2}$$

$$= C^k_{n+2} + C^{k-1}_{n+2} + C^{k-1}_{n+2} + C^{k-2}_{n+2} = C^k_{n+3} + C^{k-1}_{n+3} = C^k_{n+4}\text{, đpcm.}$$

c. Ta lần lượt có:

$$C^k_n + 2C^{k+1}_n + C^{k+2}_n = \left(C^k_n + C^{k+1}_n\right) + \left(C^{k+1}_n + C^{k+2}_n\right)$$

$$= C^{k+1}_{n+1} + C^{k+2}_{n+1} = C^{k+2}_{n+2}. \qquad (1)$$

$$C^k_n + 3C^{k+1}_n + 3C^{k+2}_n + C^{k+3}_n = \left(C^k_n + C^{k+1}_n\right) + 2\left(C^{k+1}_n + C^{k+2}_n\right) + \left(C^{k+2}_n + C^{k+3}_n\right)$$

$$= C^{k+1}_{n+1} + 2C^{k+2}_{n+1} + C^{k+3}_{n+1} = C^{k+2}_{n+2} + C^{k+3}_{n+2} = C^{k+3}_{n+3}. \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có đẳng thức phải chứng minh.

Bài tập 15. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). B.

Bài tập 16. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). B.
Bài tập 17. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.
Bài tập 18. Đáp số trắc nghiệm B. **Bài tập 20.** Đáp số trắc nghiệm A.
Bài tập 19. Đáp số trắc nghiệm D. **Bài tập 21.** Đáp số trắc nghiệm D.
Bài tập 22. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B.
Bài tập 23. Đáp số trắc nghiệm B. **Bài tập 25.** Đáp số trắc nghiệm A.
Bài tập 24. Đáp số trắc nghiệm A.
Bài tập 26. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.
Bài tập 27. Đáp số trắc nghiệm C.
Bài tập 28. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.
Bài tập 29. Đáp số trắc nghiệm D. **Bài tập 30.** Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 31.

a. Ta có:

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8 = C_8^0x^8 + C_8^1x^7.\frac{1}{2x}+\ldots+C_8^8.\left(\frac{1}{2x}\right)^8$$

$$= x^8+4x^6+7x^4+7x^2+\frac{35}{8}+\frac{7}{4x^2}+\frac{7}{16x^4}+\frac{1}{16x^6}+\frac{1}{256x^8}$$

b. Ta có:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6 = C_6^0\left(\sqrt{3}\right)^6 - C_6^1\left(\sqrt{3}\right)^5.\sqrt{15}+\ldots+C_6^6\left(\sqrt{15}\right)^6$$

$$= 3^3C_6^0 - 3^3\sqrt{5}C_6^1+\ldots+3^3.5^3C_6^6$$

Do đó, ta được:

$$\frac{1}{27}\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6 = C_6^0-\sqrt{5}C_6^1+5C_6^2-5\sqrt{5}C_6^3+25C_6^4-25\sqrt{5}C_6^5+125C_6^6$$

$$= 1-6\sqrt{5}+75-100\sqrt{5}+375-150\sqrt{5}+125$$

$$= 576-256\sqrt{5} = 64(9-4\sqrt{5}).$$

Bài tập 32. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.
Bài tập 33. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 34. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \ldots + (-1)^kC_n^kx^k + \ldots + (-1)^nC_n^nx^n. \qquad (1)$$

Thay x = 2 vào (1), ta được:

$$(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - \ldots + (-1)^n.\ 2^nC_n^n$$, đpcm.

Bài tập 35. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k. \qquad (1)$$

Thay $x=\frac{1}{n}$ vào (1), ta được $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}$.

- Ta có:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^{1}\frac{C_n^k}{n^k} = C_n^0+\frac{C_n^1}{n} = 1+1 = 2. \qquad (2)$$

- Ta có nhận xét sau với $k \geq 2$:

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{n^k.k!.(n-k)!} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Áp dụng với $k = \overline{2, n}$, ta nhận được:

$$\frac{C_n^2}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{C_n^3}{n^3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

...

$$\frac{C_n^n}{n^n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

suy ra $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} < 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3.$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập 36. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 37. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A; c). A.

Bài tập 38. Đáp số trắc nghiệm B. **Bài tập 39.** Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 40.

a. Gọi t_k là số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(p + q)^n$, ta có $C_n^k p^{n-k} q^k$.

Để tìm số hạng có giá trị lớn nhất khi k chạy từ 0 đến n, thực hiện so sánh t_k và t_{k-1}, bằng cách xét:

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{C_n^k p^{n-k} q^k}{C_n^{k-1} p^{n-k+1} q^{k-1}} = \frac{(n-k+1)q}{kp} = 1 + \frac{(n+1)q - k}{kp}. \quad (1)$$

Từ (1), suy ra:

- $t_{k-1} < t_k \Leftrightarrow \frac{t_k}{t_{k-1}} > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{(n+1)q - k}{kp} > 1 \Leftrightarrow k < (n + 1)q.$
- $t_{k-1} > t_k \Leftrightarrow \frac{t_k}{t_{k-1}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{(n+1)q - k}{kp} < 1 \Leftrightarrow k > (n + 1)q.$

Tức là, khi k chạy từ 0 đến n thì:

- t_k tăng khi k tăng và $k < (n + 1)q$.
- t_k giảm khi k tăng và $k > (n + 1)q$.

Vậy, ta được:

- t_k đạt giá trị lớn nhất bằng một số nguyên m thoả mãn
  $$(n + 1)q - 1 < m \leq (n + 1)q.$$
- Nếu $(n + 1)q$ là một số nguyên m, thì $t_m = t_{m-1}$, tức là có hai số hạng có giá trị lớn nhất là t_m và t_{m-1}.

b. Vậy, t_k đạt giá trị lớn nhất tại k = 6 và có giá trị bằng $C_8^6 \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{1792}{2187}$.

Bài tập 41. Đáp số trắc nghiệm B.
Bài tập 42. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). C.
Bài tập 43. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B.
Bài tập 44. Đáp số trắc nghiệm A. **Bài tập 46.** Đáp số trắc nghiệm B.
Bài tập 45. Đáp số trắc nghiệm B.
Bài tập 47. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B.
Bài tập 48. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B.
Bài tập 49. Đáp số trắc nghiệm D.
Bài tập 50. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A.
Bài tập 51. Đáp số trắc nghiệm A. **Bài tập 52.** Đáp số trắc nghiệm B.
Bài tập 53. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). C.
Bài tập 54. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). D.
Bài tập 55. Đáp số trắc nghiệm A. **Bài tập 57.** Đáp số trắc nghiệm A
Bài tập 56. Đáp số trắc nghiệm B. **Bài tập 58.** Đáp số trắc nghiệm A

Bài tập 59. *Hướng dẫn*:

X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{0, 1, 2, 3\}$.

Từ đó, ta cần tính được:

$$P(X = 0) = \frac{1}{6}; \qquad P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

$P(X = 2)$ và $P(X = 3)$ – *Học sinh tự làm.*

Bài tập 60. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). D.
Bài tập 61. Tham khảo phần *kiến thức cần nhớ.*
Bài tập 62. Tham khảo phần *kiến thức cần nhớ.*
Bài tập 63. Tham khảo phần *kiến thức cần nhớ.*
Bài tập 64. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). A.
Bài tập 65. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B.

ĐỀ SỐ 1

Câu I. Ta lần lượt có:

$$C_n^1 = n,$$

$$2\frac{C_n^2}{C_n^1} = 2.\frac{\frac{n!}{2!.(n-2)!}}{\frac{n!}{1!.(n-1)!}} = n - 1,$$

...

$$n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{1}{\frac{n!}{(n-1)!.1!}} = 1,$$

suy ra:

$$A = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n + (n-1) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Câu II. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.

Lời giải tự luận: Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,5}$ và $a_i \neq a_j$, $i \neq j$.

a. Nhận xét rằng:

- Có A_5^2 cách chọn chữ số 1 và chữ số 7 vào 5 vị trí.
- Có 5 cách chọn chữ số tận cùng bên trái (loại các chữ số 0, 1 và 7).
- Có A_5^2 cách chọn 2 trong 5 chữ số còn lại vào 2 vị trí còn lại.

Do đó, số các số phải tìm là:

$A_5^2 . 5 . A_5^2 = 4.5.5.20 = 2000$ số.

b. Nhận xét rằng "*Số cách chọn 2 chữ số 1 và 7 đứng kề nhau, mà chữ số 1 đứng bên trái chữ số 7, trong 1 dãy có 5 vị trí là 4 cách*".

Ta sẽ xét 2 khả năng sau:

Khả năng 1: Chữ số 1 đứng tận cùng bên trái (hàng chục ngàn) lúc đó chữ số 7 sẽ đứng ở hàng ngàn.

Mỗi bộ số dành cho ba vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập $A\backslash\{1, 7\}$ – có 6 phần tử.

$\Rightarrow$ có A_6^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1.A_6^3$ số.

Khả năng 2: Chữ số 1 đứng ở vị trí khác, tức là có thể ở vị trí hàng ngàn, hàng trăm, hàng chục – có 3 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập $A\backslash\{0, 1, 5\}$ - có 5 phần tử

  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.
- Mỗi bộ số dành cho hai vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của tập $A\backslash\{1, 7, a_1\}$ – có 5 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_5^2 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $3.5.A_5^2$ số.

Khi đó, số các số cần tìm bằng:

$1.A_6^3 + 3.5.A_5^2 = 420$ số.

Câu III. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Viết lại biểu thức dưới dạng $A = 6^8C_8^0 + 6^7C_8^1 + ... + C_8^8$.

Ta có:

$$(x + 1)^8 = x^8C_8^0 + x^7C_8^1 + ... + C_8^8. \quad (1)$$

Thay x = 6 vào (1), ta được:

$$7^8 = 6^8C_8^0 + 6^7C_8^1 + ... + C_8^8 \Leftrightarrow A = 7^8 = 5764801.$$

Cách 2: Ta có:

$$(2x + 1)^8 = (2x)^8C_8^0 + (2x)^7C_8^1 + ... + C_8^8. \quad (2)$$

Thay x = 3 vào (2), ta được:

$$7^8 = 2^8.3^8C_8^0 + 2^7.3^7C_8^1 + ... + C_8^8 \Leftrightarrow A = 7^8 = 5764801.$$

Câu IV. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A.

Lời giải tự luận: Ta có không gian mẫu là:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – có 8 phần tử.

a. **Biến cố A**: " Số được chọn là số nguyên tố " được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7\}$ – có 4 phần tử.

Khi đó:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$$

b. **Biến cố B**: "Số được chọn chia hết cho 3" được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_B = \{3, 6\}$ – có 2 phần tử.

Khi đó:

$$P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0{,}25.$$

ĐỀ SỐ 2

Câu I. Ta có:

$$\frac{P_5}{A_5^4} = \frac{5!}{5!} = 1;\quad \frac{P_4}{A_5^3} = \frac{4!}{3.4.5} = \frac{2}{5};\quad \frac{P_3}{A_5^2} = \frac{3!}{4.5} = \frac{3}{10};\quad \frac{P_2}{A_5^1} = \frac{2!}{5} = \frac{2}{5};$$

$P_3 - 2P_2 = 3! - 2.2! = 6 - 4 = 2.$

Do đó, ta được:

$$M = \frac{\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5}\right)20}{2} = 21.$$

Câu II. **Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.**

Lời giải tự luận:

a. **Cứ 3 đỉnh của hình lục giác lồi thì tạo thành một tam giác. Do đó có:**

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \text{ tam giác}$$

Số tam giác có 1 hoặc 2 cạnh là cạnh của lục giác là:

$C_6^1.C_3^1 = 6.3 = 18.$

Khi đó, số tam giác có cạnh không phải cạnh của lục giác là:

20 – 18 = 2 tam giác

b. **Số tam giác có đỉnh là đỉnh của hình bát giác lồi là:**

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{6.7.8}{6} = 56 \text{ tam giác}$$

Số tam giác có 1 hoặc 2 cạnh là cạnh của bát giác đã cho là:

$C_8^1.C_5^1 = 8.5 = 40$ tam giác

Số tam giác có cạnh không phải là cạnh của bát giác là:

56 – 40 = 16 tam giác.

Chú ý: Ta có thể tổng quát hóa yêu cầu của bài toán như sau:

Xem đa giác lồi n cạnh A_1, A_2, A_n. Số tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác là số tổ hợp n chập 3:

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

Số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác gồm 2 loại:

- Số tam giác chỉ có 1 cạnh bằng C^1_{n-4}.
- Số tam giác có 2 cạnh là bằng C^1_n.

Suy ra, số tam giác có 1 hoặc 2 cạnh là cạnh của đa giác là:

$$C^1_n + C^1_n.C^1_{n-4} = n + n(n-4) = n(n-3) = nC^1_{n-3} = C^1_n.C^1_{n-3}$$

Vậy, số tam giác có cạnh không phải là cạnh của đa giác là:

$$C^3_n - C^1_n.C^1_{n-3} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} - n(n-3)$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)n - 6n(n-3)}{6} = \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6}.$$

Câu III. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$(1 + 2x)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C^i_{12}(2x)^i = \sum_{i=0}^{12} C^i_{12} 2^i x^i$$

suy ra $a_i = C^i_{12} 2^i$, với $i = \overline{1,12}$.

Để tìm $\max(a_1, a_2, ..., a_{12})$ với $i = \overline{1,12}$, ta đi so sánh a_i và a_{i+1}, bằng cách xét:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{C^i_{12} 2^i}{C^{i+1}_{12} 2^{i+1}} = \frac{\dfrac{12!}{i!.(12-i)!}}{\dfrac{2.12!}{(i+1)!.(11-i)!}} = \frac{i+1}{2(12-i)}. \qquad (1)$$

Từ (1), suy ra:

- $a_{i+1} < a_i \Leftrightarrow \dfrac{a_i}{a_{i+1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{i+1}{2(12-i)} > 1 \Leftrightarrow i > \dfrac{23}{3}$.
- $a_{i+1} > a_i \Leftrightarrow \dfrac{a_i}{a_{i+1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{i+1}{2(12-i)} < 1 \Leftrightarrow i < \dfrac{23}{3}$.

Tức là, khi i chạy từ 1 đến 12 thì:

- a_i giảm khi i tăng và $i > \dfrac{23}{3}$.
- a_i tăng khi i tăng và $i < \dfrac{23}{3}$.

Vậy, a_i đạt giá trị lớn nhất tại $i = 8$ và có giá trị bằng $C^8_{12} 2^8 = 126720$.

Câu IV. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). C.

CHƯƠNG III
DÃY SỐ
CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§ 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để chứng minh f(n) có tính chất K với $n \in \mathbb{N}$ ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng tỏ với n = 1 thì f(1) thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng f(k) thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng f(k + 1) cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có:

a. $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b. $13^n - 1$ chia hết cho 12.

Bài tập 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có:

a. $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

b. $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19.

Bài tập 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có các đẳng thức sau:

a. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c. $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

d. $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

Bài tập 4: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có:

a. $2^n > 2n + 1$, với $n > 2$.

b. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$.

c. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{ với số thực } x > -1.$$

§ 2. DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa 1**: Một hàm số u xác định trên tập hợp* $\mathbf{N}^*$ *các số nguyên dương được gọi là một **dãy số vô hạn** (hay còn gọi tắt là **dãy số**).*

$$f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$$

Kí hiệu (u_n) hay ở dạng khai triển là $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

2. CÁC CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách:

Cách 1: Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát u_n.

Cách 2: Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi, tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu).
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Cách 3: Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

***Định nghĩa 2**:*

- *Dãy số* (u_n) *được gọi là **dãy số tăng** nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n < u_{n+1}$.
- *Dãy số* (u_n) *được gọi là **dãy số giảm** nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n > u_{n+1}$.
- *Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là **dãy số đơn điệu**.*

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

***Định nghĩa 3**:*

- *Dãy số* (u_n) *được gọi là **dãy số bị chặn trên** nếu* $\exists M \in \mathbf{R} : u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- *Dãy số* (u_n) *được gọi là **dãy số bị chặn dưới** nếu* $\exists m \in \mathbf{R} : u_n \ge m, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- *Dãy số* (u_n) *được gọi là **dãy số bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:*

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Bài toán 1: Mở đầu về dãy số.

Phương pháp chung

Với giả thiết cho dãy số (u_n) dưới dạng công thức tổng quát hoặc biểu thức truy hồi và câu hỏi thường được đặt ra là:

- Hãy viết k số hạng đầu của dãy số hoặc tìm u_k. Câu hỏi này được thực hiện bằng phép thế.
- Xác định xem a là số hạng thứ mấy của dãy số. Câu hỏi này được thực hiện bằng việc giải phương trình ẩn n.

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng minh rằng số hạng đầu thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng u_k thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng u_{k+1} cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

Bài toán 3: Xác định công thức của dãy số (u_n).

Phương pháp chung

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n.

Cách 2: Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n.

Bước 2: Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

Bài toán 4: Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n).

Phương pháp chung

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập hiệu $H = u_{n+1} - u_n$, từ đó xác định dấu của H.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $H > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $H < 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Cách 2: Nếu $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ta có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập tỉ số $P = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, từ đó so sánh P với 1.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $P > 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $P < 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Bài toán 5: Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n).

Phương pháp chung

Sử dụng định nghĩa:

- Nếu $\exists M \in \mathbf{R} : u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn trên.
- Nếu $\exists m \in \mathbf{R} : u_n \ge m, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn dưới.
- Nếu $\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn.

Chú ý: Dựa trên kết quả:

- Mọi dãy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.
- Mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 6: Cho dãy số (u_n) với:

$$u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+36}}.$$

a. Viết 5 số hạng đầu của dãy.

A. $0; \frac{2}{\sqrt{45}}; \frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{6}{\sqrt{85}}; \frac{8}{\sqrt{117}}$.

C. $-\frac{1}{6}; \frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{5}{\sqrt{72}}; \frac{7}{10}$.

B. $0; \frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{2}{\sqrt{45}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{4}{\sqrt{61}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{5}{\sqrt{72}}; \frac{7}{10}; \frac{9}{\sqrt{136}}$

b. Tìm xem $\frac{7}{10}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_5.　**B.** u_7.　**C.** u_8.　**D.** u_{10}.

Bài tập 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n+1}$.

a. Tìm $u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}$.

A. 1; 1; 1; 1.

C. $\frac{4}{5}; 1; 1; \frac{n}{n+1}$.

B. $\frac{4}{5}; \frac{11}{13}; \frac{2n-1}{2n+1}; \frac{n}{n+1}$.

D. 9; 12; 2n; 2n + 1.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_{20}.　**B.** u_{2n}.　**C.** u_{2n+1}.　**D.** u_1.

c. Tìm xem 1 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_3.　**B.** u_{101}.　**C.** u_{2007}.　**D.** u_{2n}.

Bài tập 8: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

A. 1; 7; 31; 127; 511; 2047.

C. 1; 2; 4; 8; 16; 32.

B. 1; 3; 15; 63; 127; 511.

D. 1; 3; 7; 15; 31; 63.

b. Tìm xem 511 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_5.　**B.** u_6.　**C.** u_{11}.　**D.** u_9.

Bài tập 9: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 10: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases},\ \text{với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = (e_1 + ne_2)r^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = -3 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = 3^n - 2n.3^{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 11: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

A. $u_n = 2^{n+1}$. **B.** $u_n = 2^{2n-1}$. **C.** $u_n = 4^{n+1}$. **D.** $u_n = 4^{2n-1}$.

Bài tập 12: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2}{n^2 + 4n + 3}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

A. $S_n = \dfrac{2}{n^2 + 4n + 3}$.

C. $S_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

B. $S_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.

D. $S_n = \dfrac{5n^2 + 13n}{(n+2)(n+3)}$.

Bài tập 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n).

A. Tăng **B.** Giảm **C.** Không tăng, không giảm

b. Xét tính đơn điệu của các dãy số (S_n).

A. Tăng **B.** Giảm **C.** Không tăng, không giảm

c. Xác định công thức tính S_n theo n.

A. $S_n = \dfrac{1}{n}$.

C. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

B. $S_n = \dfrac{1}{n+1}$.

D. $S_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Bài tập 14: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 8}{2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi 8.

b. Chứng minh rằng (u_n) tăng. Suy ra (u_n) bị chặn.

Bài tập 15: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Tìm công thức biểu diễn u_n theo n.

A. $u_n = 2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **C.** $u_n = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$. **D.** $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn.

§ 3. CẤP SỐ CỘNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) *được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^* \end{cases}$$

(u, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng.

- u là số hạng đầu tiên.
- d là công sai.

Đặc biệt khi d = 0 thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng (u_n) nếu:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+2}).$$

- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d].$$

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số cộng.

Phương pháp chung

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b$$

hoặc biểu thức tương đương $a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng.

Phương pháp chung

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, ta đi chứng minh:

$$a + c = 2b \text{ hoặc } a - b = b - c.$$

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng.

Phương pháp chung

Để ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, điều kiện là:

$$a + c = 2b,$$

bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Chú ý: Với bài toán "*Tìm điều kiện của tham số để phương trình có các nghiệm lập thành cấp số cộng*" chúng ta cần sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để thực hiện.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n).

Phương pháp chung

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công sai d.

Bài toán 5: Tính tổng.

Phương pháp chung

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số cộng.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 16: Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $a_1, a_3, a_5, ..., a_{2n-1}, ...$

A. Là cấp số cộng **B.** Không là cấp số cộng

b. $a_2, a_4, a_6, ..., a_{2n}, ...$

A. Là cấp số cộng **B.** Không là cấp số cộng

Bài tập 17: Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a. $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, với $k = 1, 2, \ldots, n$.

b. $(q - r)a_p + (r - p)a_q + (p - q)a_r = 0$.

c. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$,

với $a_i > 0,\ i = \overline{1, n}$.

Bài tập 18: Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0. Chứng minh rằng ba số $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 19: Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 20: Tìm x để ba số sau lập thành một cấp số cộng:

a. $x^2 - x + 1, x - 2, 1 - 2x$.

A. $x = 2, x = 3$. **B.** $x = 2, x = 1$. **C.** $x = 4, x = 3$. **D.** $x = 1, x = 4$.

b. $x^3 + x^2 + 1, x^2 + 1, x^2 - x + 1$.

A. $x = 0, x = \pm 1$. **B.** $x = 1, x = \pm 2$. **C.** $x = 2, x = \pm 3$. **D.** $x = 3, x = \pm 4$.

Bài tập 21: Cho phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng 3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

Bài tập 22: Xác định m để các phương trình sau có các nghiệm lập thành một cấp số cộng:

a. $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$.

A. $m \leq 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m = 0$. **D.** m tuỳ ý.

b. $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$.

A. $m = \dfrac{20}{3}$. **B.** $m = -\dfrac{20}{3}$. **C.** $m > 4$. **D.** $m < -4$.

Bài tập 23: Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

A. $u_1 = 1$ và $d = 3$. **C.** $u_1 = -1$ và $d = -3$.

B. $u_1 = -1$ và $d = 3$. **D.** $u_1 = 1$ và $d = -3$.

Bài tập 24: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 20 và tổng bình phương của chúng bằng 120.

A. 3; 5; 7; 15 hoặc 15; 7; 5; 3. **C.** 5; 5; 5; 5.

B. −1; 3; 7; 11 hoặc 11; 7; 3; −1. **D.** 2; 4; 6; 8 hoặc 8; 6; 4; 2.

Bài tập 25: Tính tổng sau:

$$S = 200^2 - 199^2 + 198^2 - 197^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

A. 21000. **B.** 20100. **C.** 20010. **D.** 20001.

§ 4. CẤP SỐ NHÂN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in N^* \end{cases}$$

(u, q là hai số thực khác 0 cho trước) được gọi là cấp số nhân.

- u là số hạng đầu tiên.
- q là công bội.

Đặc biệt khi $q = 1$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức $u_n = u_1.q^{n-1}$.
- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân (u_n) nếu:

  $$u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2}.$$
- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

  $$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số nhân.

Phương pháp chung

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được $a.c = b^2$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân.

Phương pháp chung

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, ta đi chứng minh $ac = b^2$.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân.

Phương pháp chung

Để ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, điều kiện là $ac = b^2$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n).

Phương pháp chung

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công bội q.

Bài toán 5: Tính tổng.

Phương pháp chung

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số nhân.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 26: Cho (a_n) là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ và $a_1 \neq 0$. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

A. Là cấp số nhân **B.** Không là cấp số nhân

b. $(p.a_n)$, với p là số thực khác 0.

Là cấp số nhân Không là cấp số nhân

c. $\left(\frac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực khác 0.

A. Là cấp số nhân **B.** Không là cấp số nhân

d. (a_n^k), với $k \in \mathbf{Z}^+$.

A. Là cấp số nhân **B.** Không là cấp số nhân

Bài tập 27: Cho cấp số nhân (a_n). Có thể (a_n) cũng lập thành một cấp số cộng hay không ?

Bài tập 28: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

a. $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$.

b. $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

c. $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)a^2b^2c^2 = a^3 + b^3 + c^3$.

Bài tập 29: Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab + bc + ca}$, $a + b + c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 30: Cho ba số a, b, c thoả mãn $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$. Chứng minh rằng a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 31: Giả sử các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, còn các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y.

A. $(0; 0)$ và $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10})$. **C.** $(\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ và $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10})$.

B. $(\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ và $(0; 0)$. **D.** $(0; 0)$ và $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

Bài tập 32: Tính x theo a, b, c để ba số x + a, x + b, x + c lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \frac{a^2 - bc}{2a - b - c}$. **C.** $x = \frac{c^2 - ab}{a + b - 2c}$.

B. $x = \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c}$. **D.** $x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$.

Bài tập 33: Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_4 - u_2 = 12$ và $u_5 - u_3 = 24$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

A. $u_1 = 4$ và $q = 2$. **C.** $u_1 = 1$ và $q = 3$.

B. $u_1 = 2$ và $q = 2$. **D.** $u_1 = -1$ và $q = -3$.

b. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.

A. 6204. **B.** 4620. **C.** 462. **D.** 2046.

c. Tính tổng $S' = u_3 + u_6 + \ldots + u_{12}$.

A. 4680. **B.** 8460. **C.** 6480. **D.** 4068.

Bài tập 34: Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_2 + u_4 = 10$ và $u_1 + u_3 + u_5 = -21$. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

A. $u_1 = -16$ và $q = -2$ hoặc $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

B. $u_1 = -16$ và $q = -\frac{1}{2}$ hoặc $u_1 = -1$ và $q = -2$.

C. $u_1 = 16$ và $q = -\frac{1}{2}$ hoặc $u_1 = 1$ và $q = -2$.

D. $u_1 = 16$ và $q = -2$ hoặc $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 35: Tính tổng sau:

$$S = 6 + 66 + 666 + \ldots + \underbrace{66\ldots6}_{\text{n chữ số}}.$$

A. $10^{n+1} - 10 - 9n$. **C.** $10^{n+1} + 10 + 9n$.

B. $\frac{2}{27}(10^{n+1} - 10 - 9n)$. **D.** $\frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n)$.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Kí hiệu điều cần chứng minh là (*), ta giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$, ta có $1^3 + 11 = 12 \vdots 6$.

  Như vậy, (*) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là $(k^3 + 11k) \vdots 6$.

  Ta sẽ đi chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

  $$\begin{aligned}(k+1)^3 + 11(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11\\ &= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12\end{aligned}$$

  Vì $(k^3 + 11k) \vdots 6$, $3k(k + 1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$ nên biểu thức trên chia hết cho 6.

Từ các chứng minh trên suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

b. Kí hiệu điều cần chứng minh là (**), ta giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$, ta có $13 - 1 = 12 \vdots 12$.

  Như vậy, (**) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (**) đúng với $n = k$, tức là $(13^k - 1) \vdots 12$.

  Ta sẽ đi chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

  $$13^{k+1} - 1 = 13^{k+1} - 13^k + 13^k - 1 = 12.\ 13^k + (13^k - 1).$$

  Vì $12.\ 13^k \vdots 12$ và $(13^k - 1) \vdots 12$ nên biểu thức trên chia hết cho 12.

Từ các chứng minh trên suy ra (**) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 2. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 3. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 4. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 5. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 6. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). C.

Bài tập 7. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). D; c). D.

Bài tập 8. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B.

Bài tập 9. Ta có $u_3 = 5 \le \left(\frac{5}{2}\right)^3 \Rightarrow$ đúng với $n = 1, 2, 3$.

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $u_{k-1} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}$ và $u_k \le \left(\frac{5}{2}\right)^k$

ta đi chứng minh $u_{k+1} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2u_k \le \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^k = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\left(\frac{4}{25} + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\frac{24}{25} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n \le \left(\frac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 10. *Hướng dẫn*: Vì r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$ nên $c = 2r$ và $d = -r^2$, do đó u_n có dạng $u_n = 2ru_{n-1} - r^2u_{n-2}$.

Bài tập 11. Đáp số trắc nghiệm A.

Hướng dẫn: Ta có $u_1 = 4 = 2^2$; $u_2 = 2.2^2 = 2^3$; $u_3 = 2.2^3 = 2^4$.

Từ đó, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $u_n = 2^{n+1}$.

Bài tập 12. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 13. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). C.

Bài tập 14. *Hướng dẫn*:

a. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

b. Sử dụng kết quả câu a.

Bài tập 15.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

b. Ta có $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ suy ra $0 < u_n < 2$ suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Bài tập 16. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 17.

a. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$.

b. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$.

c. Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} = -\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)$$

suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)$$

$$= \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 18. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} = \frac{c+a-b-c}{(b+c)(c+a)} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-c-a}{(c+a)(a+b)} = \frac{b^2-c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) do điều kiện ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng suy ra:

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{c+a}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 19. Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c).$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a-b} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\frac{1}{2}(a-c)} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Vậy, ba số $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 20. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 21. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = -a \Leftrightarrow 3x_2 = -a \Leftrightarrow x_2 = -\frac{a}{3}.$$

Với $x_2 = -\frac{a}{3}$ thay vào phương trình đầu ta được:

$$(-\frac{a}{3})^3 + a(-\frac{a}{3})^2 + b(-\frac{a}{3}) + c = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0. \qquad (1)$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình ban đầu có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Từ (1) suy ra phương trình có nghiệm $x_2 = -\frac{a}{3}$. Khi đó:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \Leftrightarrow x_1 + x_3 - \frac{a}{3} = -a \Leftrightarrow x_1 + x_3 = -\frac{2a}{3} = 2x_2$$

$\Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy, điều kiện cần và đủ để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng là:

$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$

Bài tập 22. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B.

Bài tập 23. Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 24. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 25. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 26. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). A; d). A.

Bài tập 27. Nếu cấp số nhân (a_n) có $q = 1$ thì (a_n) cũng lập thành một cấp số cộng có $d = 0$.

Bài tập 28. Với ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân ta được $b^2 = ac$.

a. Ta có:

$$(ab + bc + ca)^3 = (ab + bc + b^2)^3 = b^3(a + b + c)^3 = b.b^2(a + b + c)^3$$
$$= abc(a + b + c)^3, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - ac = a^2 + ac + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)a^2b^2c^2=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=\frac{ac^3}{a}+\frac{b^4}{b}+\frac{a^3c}{c}$$

$$=a^3+b^3+c^3\text{, đpcm.}$$

Bài tập 29. Với ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân ta được $b^2 = ac$.

Khi đó:

$$(\sqrt{ab+bc+ca})^2=ab+bc+ca=ab+bc+b^2=b(a+b+c)$$

$$=\sqrt[3]{b^3}(a+b+c)=\sqrt[3]{b^2.b}(a+b+c)=\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

⇔ ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab+bc+ca}$, $a + b + c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 30. Biến đổi biểu thức:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2 \Leftrightarrow a^2c^2+b^4=2ab^2c \Leftrightarrow (ac-b^2)^2=0$$

⇔ $b^2 = ac$ ⇔ ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 31. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt sử dụng các giả thiết:

a. Các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, suy ra:

$$5x-y+x+2y=2(2x+3y) \Leftrightarrow 2x=5y. \qquad (1)$$

b. Các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân, suy ra:

$$(y+1)^2(x-1)^2=(xy+1)^2 \Leftrightarrow (y+1)(x-1)=\pm(xy+1).$$

- Với $(y + 1)(x - 1) = (xy + 1)$, ta được:

  $$(y+1)(2x-2)=(2xy+2) \Leftrightarrow (y+1)(5y-2)=(5y^2+2)$$

  $$\Leftrightarrow 3y-4=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{10}{3}.$$

- Với $(y + 1)(x - 1) = -(xy + 1)$, ta được:

  $$(y+1)(2x-2)=-(2xy+2) \Leftrightarrow (y+1)(5y-2)=-(5y^2+2)$$

  $$\Leftrightarrow 10y^2+3y=0 \overset{y=0\text{ loại}}{\Rightarrow} y=-\frac{3}{10} \Rightarrow x=-\frac{3}{4}.$$

Bài tập 32. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Để ba số $x + a$, $x + b$, $x + c$ lập thành một cấp số nhân điều kiện là:

$$(x+a)(x+c)=(x+b)^2 \Leftrightarrow (a-2b+c)x=b^2-ac$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c\neq 0 \\ x=\dfrac{b^2-ac}{a-2b+c} \end{cases}$$

Bài tập 33. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). D; c). A.

Bài tập 34. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 35. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta viết lại $S = 6(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số}})$.

Xét hai dãy số:

- Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$.
- Dãy số $(s_n) = \{1, 11, 111, ..., \underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số}}\}$.

Suy ra s_n là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), tức là:

$$s_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

Khi đó, ta nhận được:

$$S = 6(s_1 + s_2 + ... + s_n) = 6\sum_{k=1}^{n} s_k = 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k - 1) = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}10^k - \frac{2n}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{2n}{3} = \frac{2}{27}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

CHƯƠNG IV
GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§ 1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

Định nghĩa: *Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** 0 (hay có giới hạn 0) nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = 0$, viết tắt là $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.

Nhận xét: Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0.

2. MỘT SỐ DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0 THƯỜNG GẶP

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

a. $\lim \dfrac{1}{n} = 0.$

b. $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

c. $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

d. Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

e. Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Định lí: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0:

a. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. b. $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Bài tập 2. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0:

a. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. b. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

Bài tập 3. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau có giới hạn 0:

a. $u_n = \dfrac{\sin n}{n+4}$. b. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$.

Bài tập 4. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau có giới hạn 0:

a. $u_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{5}}{4^n}$. b. $u_n = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1{,}01)^n}$.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

a. Chứng minh rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{2}{3}$ với mọi n.

b. Chứng minh rằng $0 < u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi n.

c. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0.

§ 2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN

***Định nghĩa**: Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là số thực** L nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - L) = 0$.

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = L$, viết tắt là $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

2. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ

Định lí 1: Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

a. $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b. Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 2: Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

a. Các dãy số $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n.v_n)$ và (cu_n) có giới hạn và:

- $\lim(u_n + v_n) = L + M$.
- $\lim(u_n - v_n) = L - M$.
- $\lim(u_n.v_n) = LM$.
- $\lim(cu_n) = cL$.

b. Nếu $M \ne 0$ thì dãy số $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ có giới hạn và $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$.

Định lí 3: (*Nguyên lí kẹp giữa*): Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n) và số thực L. Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

Định lí 4:

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Với cấp số nhân (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ thì:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim u_n = L$.

Phương pháp chung

Ta đi chứng minh

$$\lim(u_n - L) = 0.$$

Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn.

Phương pháp chung

Sử dụng định lí Vaiơstrat, cụ thể:

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

Bài toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn.

Phương pháp chung

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Đưa dãy số cần tìm giới hạn về dạng tổng, hiệu, tích, thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim C = C$, với C là hằng số.
2. Kết quả trong định lí 1.
3. Kết quả trong định lí 2.

Cách 2: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa.

Bài toán 4: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Phương pháp chung

Sử dụng công thức:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}, \text{ với } |q| < 1.$$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 6. Chứng minh rằng:

a. $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$.   b. $\lim \dfrac{2n+5}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$.

Bài tập 7. Chứng minh rằng:

a. $\lim \dfrac{2n^2}{n^2+1} = 2$.   b. $\lim \dfrac{n^2+4n}{n^2+4n+5} = 1$.

Bài tập 8. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2+u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 12. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{2n+1}{n+2}$.

A. 2.   **B.** $\dfrac{3}{2}$.   **C.** $-\dfrac{1}{2}$.   **D.** $\dfrac{1}{2}$.

b. $\lim \dfrac{n+1}{n^2+2}$.

A. 2.   **B.** $\dfrac{1}{2}$.   **C.** 0.   **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Bài tập 13. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$.

A. 0.   **B.** $\dfrac{1}{2}$.   **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.   **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

b. $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Bài tập 14. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 1.

b. $\lim \dfrac{n-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Bài tập 15. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{1-4^n}{1+4^n}$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $-\frac{1}{3}$.

b. $\lim \dfrac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$.

A. $-\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{13}{75}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** -4.

Bài tập 16. Tính giới hạn sau:

$$\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}\right].$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Bài tập 17. Tính giới hạn sau:

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Bài tập 18. Tính giới hạn sau:

$$\lim\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n},\ \text{với } |a|,\ |b|<1.$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Bài tập 19. Tính tổng sau:

$$S = 8 + 88 + 888 + \dots + \underbrace{88\dots8}_{\text{n chữ số}}.$$

A. $10^{n+1} - 10 - 36n$.

B. $\frac{8}{81}(10^{n+1} - 10 - 72n)$.

C. $10^{n+1} + 10 + 54n$.

D. $\frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 72n)$.

Bài tập 20. Tính tổng sau:

$$S = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2.$$

§ 3. DÃY SỐ DẦN ĐẾN VÔ CỰC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN $+\infty$

***Định nghĩa**: Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** $+\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = +\infty$, viết tắt là $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

a. $\lim n = +\infty$.

b. $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

c. $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN $-\infty$

***Định nghĩa**: Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** $-\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều nhỏ hơn một số âm tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = -\infty$, viết tắt là $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

Nhận xét: Nếu $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim(-u_n) = +\infty$.

Chú ý:

1. Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
2. Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

3. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Quy tắc 1: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	–	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	–	$+\infty$

Quy tắc 3: Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n \neq 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

4. MỘT SỐ KẾT QUẢ

a. $\lim \frac{q^n}{n} = +\infty$ và $\lim \frac{n}{q^n} = 0$, với $q > 1$.

Mở rộng: Ta có $\lim \frac{q^n}{n^k} = +\infty$ và $\lim \frac{n^k}{q^n} = 0$, với $q > 1$ và k là một số nguyên dương.

b. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

- Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = L \in \mathbf{R}$ và $\lim |v_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim v_n = L \in \mathbf{R}$ thì $\lim (u_n + v_n) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 21. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim(2n^2 - n + 1)$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim(-n^3 + 2n^2 + 2)$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Bài tập 22. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8}$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$.

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt[3]{2}$. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Bài tập 23. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim(n + 1)\sqrt{n}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim(-2n^2 + 5n)(3^n - 2^n)$.

A. $-\infty$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $+\infty$.

Bài tập 24. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\dfrac{3n^3}{-n^2 + 1}$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1}$.

A. $-\infty$. **B.** 3 **C.** -3. **D.** $+\infty$.

Bài tập 25. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n})n$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** -3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim(\sqrt{2n + 3} - \sqrt{n + 1})$.

A. $-\infty$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $+\infty$.

Bài tập 26. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = \dfrac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^4 - n^2 + 5}}{-4n + 9}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Bài tập 27. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Bài tập 28. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = \dfrac{3^n - 11}{1 + 5.2^n}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 3.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Bài tập 29. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = (2.3^n - 4^{n+1} + 8)$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** -4. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = 2n - 1 + 3^n$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Bài tập 30. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\left(\dfrac{\sin n^2}{\sqrt{n}} - 5\right)$.

A. $-\infty$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

b. $\lim[n.\cos(n\pi) - 2n^2]$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ – HÀM SỐ LIÊN TỤC

§ 4. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1 *(Giới hạn hữu hạn): Giả sử* (a; b) *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* $y = f(x)$ *là một hàm số xác định trên một khoảng* (a; b), *có thể trừ ở một điểm* x_0. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong tập hợp* $(a; b)\backslash\{x_0\}$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, với c là hằng số.
2. Nếu hàm số $f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa 2 *(Giới hạn vô cực): Giả sử* $(a; b)$ *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* $y = f(x)$ *là một hàm số xác định trên một khoảng* $(a; b)$, *có thể trừ ở một điểm* x_0. *Ta nói* ***hàm số*** $f(x)$ ***có giới hạn vô cực khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong tập hợp* $(a; b)\setminus\{x_0\}$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = \pm\infty$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ hoặc } f(x) \to \pm\infty \text{ khi } x \to x_0.$$

2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3*: Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(a; +\infty)$. *Ta nói* ***hàm số*** $f(x)$ ***có giới hạn là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** $+\infty$ *nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(a; +\infty)$ *mà* $\lim x_n = +\infty$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

Chú ý: Các giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ta có các kết quả sau với số nguyên dương k bất kì cho trước:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}.$

3. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1*: Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbf{R})$. *Khi đó:*

a. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$

b. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M;$

Đặc biệt, nếu c là hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} [c.f(x)] = cL;$

c. Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}.$

Định lí 2: *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbf{R}$. *Khi đó:*

a. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$;

b. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;

c. Nếu $f(x) \ge 0$ với thì $L \ge 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Định lí 3: *Giả sử* $f(x)$, $g(x)$ *và* $h(x)$ *là ba hàm số xác định trên một khoảng* (a; b) *chứa điểm* x_0, *có thể trừ ở một điểm* x_0. *Nếu* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *với mọi* $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Chú ý: Các định lí 1, định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to \pm\infty$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số tìm giới hạn.

Phương pháp chung

Sử dụng các định nghĩa 1, định nghĩa 2, định nghĩa 3.

Bài toán 2: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với

- $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_1$.
- $y_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_2$.

Bước 2: Nhận xét rằng $L_1 \ne L_2$.

Bước 3: Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

Bài toán 3: Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn.

Phương pháp chung

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Đưa hàm số cần tìm giới hạn về dạng tổng, hiệu, tích, thương của những hàm số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, với c là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$

Cách 2: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, cụ thể:

Giả sử cần tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Bước 2: Khẳng định:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

$$\left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L\right).$$

Bước 3: Kết luận:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} f(x) = L\right).$$

Chú ý: Chúng ta còn sử dụng các kết quả sau:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
2. Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số xác định trên khoảng (a; b) có thể trừ điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ và $|g(x)| \le M$ với mọi $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$ (trong đó M là một hằng số) thì $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = 0$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 31. Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+2}{\sqrt{x-1}}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$.

c. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Bài tập 32. Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{3x+1}$.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+x-1)$.

Bài tập 33. Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos x$.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin 3x$.

Bài tập 34. Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1} \sin\dfrac{1}{x-1}$.

Bài tập 35. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$.

A. −1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Bài tập 36. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} x\left(3 - \dfrac{2}{x}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4x - x^2}{\sqrt{x} - 2}$.

A. $-\infty$. **B.** -16. **C.** 4. **D.** 16.

Bài tập 37. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 1}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Bài tập 38. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 . \cos\dfrac{1}{x}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - \cos x}{x + \cos 2x}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Bài tập 39. Giả sử hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa điểm $x = 0$ và thoả mãn $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq M$ với mọi $x \neq 0$. Tính $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

A. $-M$. **B.** 0. **C.** M. **D.** $+\infty$.

Bài tập 40. Cho hàm số f(x) thoả mãn $1 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 5$ với $0 < |x - 2| < 1$. Tính $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

§ 5. GIỚI HẠN MỘT BÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa 1 *(Giới hạn phải): Giả sử hàm số* f(x) *xác định trên một khoảng* $(x_0; b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn phải là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(x_0; b)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+.$$

Định nghĩa 2 *(Giới hạn trái): Giả sử hàm số* f(x) *xác định trên một khoảng* $(a; x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn trái là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(a; x_0)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^-.$$

Định lí: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ là $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý:

1. Các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.
2. Định lí vẫn đúng với giới hạn vô cực.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính giới hạn một bên của hàm số.

Phương pháp chung

Sử dụng các định nghĩa với lưu ý:

- $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x > x_0$ (khi đó $|x - x_0| = x - x_0$).
- $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x < x_0$ (khi đó $|x - x_0| = x_0 - x$).

Bài toán 2: Giới hạn của hàm số kép.

Phương pháp chung

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \ge x_0 \end{cases}.$$

Để tính giới hạn hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
- Để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$ điều kiện là:

  $L_1 = L_2 \Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 41. Áp dụng định nghĩa giới hạn phải và giới hạn trái, tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Bài tập 42. Tính các giới hạn sau (nếu có):

a. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{|3x+3|}{x+1}$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{|3x+3|}{x+1}$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|3x+3|}{x+1}$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** Không tồn tại.

Bài tập 43. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4\sqrt{x} - x}{\sqrt{2x} + x}$.

A. -1. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

b. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{3-x}}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Bài tập 44. Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 1 \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

a. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

b. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

c. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Bài tập 45. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi x → 0.

A. $a = 1$. **B.** $a = 0$. **C.** $a = -1$. **D.** Không tồn tại.

§ 6. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Quy tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)]$ được cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	−	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	−	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	−	$-\infty$
−	+	$-\infty$
−	−	$+\infty$

Chú ý:

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 46. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -5. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$.

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** $+\infty$.

Bài tập 47. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x + 1}{x - 2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x + 1}{x - 2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** -1. **D.** $+\infty$

Bài tập 48. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$

b. $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Bài tập 49. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5}{x^2 + 1}$.

A. $-\infty$. **B.** -5. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Bài tập 50. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{2x+1}{2x-3} \right]$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

§ 7. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán 1: Tính giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$.

Phương pháp chung

Bản chất của việc khử dạng không xác định $\dfrac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để:

- Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định.
- Hoặc đưa giới hạn về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Chú ý:

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x) = (x - x_0).g(x)$.
- Liên hợp của biểu thức:

$\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$.

$\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$.

Bài toán 2: Tính giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Phương pháp chung

Ta chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó.

Bài toán 3: Tính giới hạn dạng $0.\infty$.

Phương pháp chung

Ta thường lựa chọn một trong hai hướng biến đổi:

1. $0.\infty = 0.\dfrac{1}{0} = \dfrac{0}{0}$, đây là dạng giới hạn đã biết trong bài toán 1.
2. $0.\infty = \dfrac{1}{\infty}.\infty = \dfrac{\infty}{\infty}$, đây là dạng giới hạn đã biết trong bài toán 2.

Bài toán 4: Giới hạn dạng $\infty - \infty$.

Phương pháp chung

Sử dụng các phương pháp đã biết để tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ chúng ta tính được giới hạn dạng $\infty - \infty$ thông qua phép nhân liên hợp.

Bài toán 5: Giới hạn của hàm số lượng giác.

Phương pháp chung

Ta thường sử dụng kết quả:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 51. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

Bài tập 52. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Bài tập 53. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $-\frac{10}{9}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$.

A. $-\infty$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $+\infty$.

Bài tập 54. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x^3 + 1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2)\sqrt{\dfrac{x - 1}{x^3 + x}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Bài tập 55. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Bài tập 56. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x - 1} - 1}{x - 1}$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3x - 5}}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 6}}$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 6.

Bài tập 57. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 4.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{4x - 3} - 1}{x - 1}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 9.

Bài tập 58. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + a}}$, với $a > 0$.

b. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

Bài tập 59. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 60. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x.\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right]$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x-1)^2.\sin\dfrac{1}{x-1}\right]$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

§ 8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1: *Cho hàm số* y = f(x) *xác định trên khoảng* (a; b). *Hàm số* y = f(x *được gọi là* ***liên tục tại điểm*** $x_0 \in (a; b)$ *nếu :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu tại điểm x_0 hàm số y = f(x) không liên tục, thì được gọi là *gián đoạn* t x_0 và điểm x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số y = f(x).

Chú ý: Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu ba điều kiện sa được đồng thời thoả mãn :

(i). f(x) xác định tại x_0.

(ii). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại.

(iii). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số y = f(x) gián đoạn tại điểm x_0 nếu một trong ba điều kiện tr không được thoả mãn.

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2: Ta có :

a. *Giả sử hàm số* y = f(x) *xác định trên khoảng* (a; b). *Ta nói hàm số* y = f(x) *li tục trên khoảng* (a; b) *nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.*

b. *Giả sử hàm số* y = f(x) *xác định trên đoạn* [a; b] *được gọi là liên tục* ***trên đo*** [a; b] *nếu nó liên tục trong khoảng* (a; b) *và:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét: Ta có:

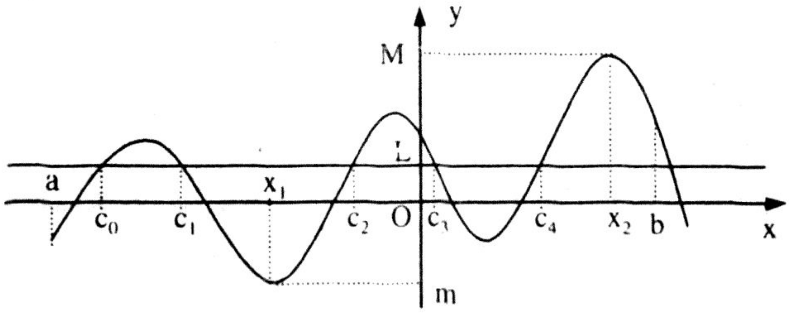
1. Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.
2. Các hàm số đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm số lượng giác là liên tục trên tập xác định của chúng.

Định lí 1: *Các hàm số lượng giác* y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx *liên tục trên tập xác định của chúng.*

3. TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí 2 (Định lí về giá trị trung bình của hàm số liên tục): *Giả sử hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a; b]. *Nếu* f(a) ≠ f(b) *thì với mỗi số thực M nằm giữa* f(a) *và* f(b), *tồn tại ít nhất một điểm* c ∈ (a; b) *sao cho* f(c) = M.

Ý nghĩa hình học của định lí: *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a; b] *và M là số thực nằm giữa* f(a) *và* f(b) *thì đường thẳng* y = M *cắt đồ thị hàm số* y = f(x) *tại ít nhất một điểm* c ∈ (a; b).



Hệ quả: *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a; b] *và* f(a).f(b) < 0 *thì tồn tại ít nhất một điểm* c ∈ (a; b) *sao cho* f(c) = 0.

Ý nghĩa hình học của hệ quả: *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên đoạn* [a; b] *và* f(a).f(b) < 0 *thì đồ thị hàm số* y = f(x) *cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ* c ∈ (a; b).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.

Phương pháp chung

1. Với hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x = x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L.$$

Bước 2: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 3: Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

2. **Với hàm** số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 2: (*Liên tục trái*) Tính:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục trái.

Bước 3: (*Liên tục phải*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục phải.

Bước 4: Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = L_2$, từ đó đưa ra lời kết luận.

Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng.

Phương pháp chung

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng I, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn.

Bước 2: Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao.

Bước 3: Kết luận.

Bài toán 3: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm.

Phương pháp chung

Cho phương trình :

$$f(x) = 0.$$

Để chứng minh phương trình có k nghiệm trong [a, b], ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn các số $a < T_1 < T_2 < \ldots < T_{k-1} < b$ chia đoạn [a, b] thành k khoảng thoả mãn :

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \ldots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Kết luận về số nghiệm của phương trình trên đoạn [a, b].

Bài toán 4: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số.

Phương pháp chung

Sử dụng kết quả:

"*Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục và không triệt tiêu trên đoạn* [a, b] *thì có dấu nhất định trên* (a, b)".

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 61. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 62. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bài tập 63. Chứng tỏ rằng hàm số sau liên tục trên **R**:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 64. Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}.$$

Bài tập 65. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

a. Tìm a để f(x) liên tục trái tại điểm x = 1.

A. $a = 0$. **B.** $a = -1$. **C.** $a = 1$. **D.** $a = 4$.

b. Tìm a để f(x) liên tục phải tại điểm x = 1.

A. $a = 0$. **B.** $a = -1$. **C.** $a = 1$. **D.** $a = 2$.

c. Tìm a để f(x) liên tục trên **R**.

A. $a = 0$. **B.** $a = -1$. **C.** $a = 1$. **D.** Vô nghiệm.

Bài tập 66. Xác định a, b để hàm số sau liên tục trên toàn trục số:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } |x| \leq \pi \\ ax + b & \text{khi } |x| > \pi \end{cases}.$$

A. $a = b = 0$. **B.** $a = b = 1$. **C.** $a = 0; b = 1$. **D.** $a = 1; b = 0$.

Bài tập 67. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thuộc (−1; 1):

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0.$$

Bài tập 68. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có bốn nghiệm phân biệt:

$$|x|^3 - 2mx^2 + 2 = 0, \text{ với mọi } m > 2.$$

Bài tập 69. Biết rằng $a \leq b \leq c \leq d$, p và q là hai số thực bất kì. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$p(\sqrt[3]{1-x} - a)(\sqrt[3]{1-x} - c) + q(\sqrt[3]{1-x} - b)(\sqrt[3]{1-x} - d) = 0.$$

Bài tập 70. Xét dấu hàm số $f(x) = 2 + \cos x - 2\tan\dfrac{x}{2}$ trên khoảng $(0; \pi)$.

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG IV

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{1-n} = -2$.

b. Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

c. Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1} - n}.$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** ∞.

Câu II. (4 điểm):

a. (2 điểm): Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1) = 2$.

b. (1 điểm): Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

c. (1 điểm): Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1)(x^3+2)}{x^6}.$$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** ∞.

Câu III. (3 điểm):

a. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

b. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thuộc $(-1, 1)$:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0.$$

c. Xét dấu hàm số $f(x) = \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3}$.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 0.$$

b. Tính giới hạn:

$$\lim \sqrt{\frac{4n + \sin(n\pi)}{n}}.$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

c. Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu II. (4 điểm):

a. (2 điểm): Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{x-3}} = +\infty.$$

b. (1 điểm): Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

c. (1 điểm): Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Không tồn tại.

Câu III. (3 điểm):

a. Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ mà $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ $\forall t > 0$. Chứng tỏ rằng hàm số g cho bởi công thức sau:

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan x) & \text{khi } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) & \text{khi } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

cũng liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 - m|x| - 1 = 0.$$

c. Xét dấu hàm số:

$$f(x) = (1 - \tan x)(1 + \sin 2x) - 1 - \tan x.$$

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có:

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có:

$$\left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{và } \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\text{và } \lim\frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$\left|\frac{\sin n}{n+4}\right| < \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có:

$$\left|\frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}\right| = \left|\frac{\cos n}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập 4.

a. Ta có:

$$\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{4^n}\right| < \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ và } \lim\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có:

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1{,}01)^n}\right| < \frac{1}{(1{,}01)^n} = \left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n \text{ và } \lim\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập 5.

a. Với mọi n ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right):\left(\frac{n}{3^n}\right) = \frac{n+1}{3n} \le \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}, \text{ đpcm.}$$

b. Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh – *Học sinh tự làm.*

c. Từ kết quả câu b) ta có:

$$u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ và } \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập 6.

a. Đặt $u_n = \frac{n}{n+1}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \lim\frac{n-n-1}{n+1} = \lim\frac{-1}{n+1} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = 1$.

b. Đặt $u_n = \frac{2n+5}{3n+1}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(\frac{2n+5}{3n+1} - \frac{2}{3}\right) = \lim\frac{3(2n+5)-2(3n+1)}{3(3n+1)} = \lim\frac{13}{3(3n+1)} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = \frac{2}{3}$.

Bài tập 7.

a. Đặt $u_n = \frac{2n^2}{n^2+1}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(\frac{2n^2}{n^2+1} - 2\right) = \lim\frac{2n^2-2(n^2+1)}{n^2+1} = \lim\frac{-2}{n^2+1} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = 2$.

b. Đặt $u_n = \frac{n^2+4n}{n^2+4n+5}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(\frac{n^2+4n}{n^2+4n+5} - 1\right) = \lim\frac{n^2+4n-(n^2+4n+5)}{n^2+4n+5} = \lim\frac{-5}{n^2+4n+5} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = 1$.

Bài tập 8. Ta sẽ đi chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên.

- Chứng minh dãy số (u_n) tăng. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n$$
$$= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

- Chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên. Ta có:

$$u_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

Bài tập 9. Bằng việc chứng minh (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2 (cụ thể $u_n < 2 - \frac{1}{n}$) chúng ta kết luận được dãy số có giới hạn.

Bài tập 10. Ta sẽ đi chứng minh dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới.

- Chứng minh dãy số (u_n) giảm. Thật vậy, dễ thấy $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$, xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$
$$= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli $(1 + a)^n > 1 + na$, do đó:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \left[1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$$

suy ra:

$$P < \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \left[1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^4}\right]^n < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

- Chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới. Ta có $u_n > 1$, tức là nó bị chặn dưới.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

Bài tập 11. Đi chứng minh (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2 do đó nó có giới hạn.

Bài tập 12. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). C. **Bài tập 14.** Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C.

Bài tập 13. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). D. **Bài tập 15.** Đáp số trắc nghiệm a). B; b). D.

Bài tập 16. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

suy ra $\lim\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}\right] = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

Bài tập 17. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Đặt $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, ta có nhận xét rằng:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < u_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

trong đó $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ và $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ suy ra $\lim u_n = 1$.

Bài tập 18. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a+a^2+\ldots+a^n)(1-a)(1-b)}{(1+b+b^2+\ldots+b^n)(1-b)(1-a)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty} b^{n+1}} = 1.$$

Bài tập 19. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta viết lại $S = 8(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n\,\text{chữ số}})$.

Xét hai dãy số:

- Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$.
- Dãy số $(s_n) = \{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n\,\text{chữ số}}\}$.

Suy ra s_n là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), tức là $s_n = \frac{10^n - 1}{10-1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$.

Khi đó, ta nhận được:

$$S = 8(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = 8\sum_{k=1}^{n} s_k = 8\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k - 1) = \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k - \frac{8n}{9}$$

$$= \frac{8}{9}.10.\frac{10^n-1}{10-1} - \frac{8n}{9} = \frac{8}{81}(10^{n+1} - 10 - 72n).$$

Bài tập 20. Ta viết lại:

$$S = (9 + 9^2 + \ldots + 9^n) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{1}{9^n}\right) + 2n$$

$$= \frac{9(9^n - 1)}{9-1} + \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9^n} - 1\right)}{\frac{1}{9} - 1} + 2n$$ – *Bạn đọc biến đổi tiếp.*

Bài tập 21. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A

Bài tập 22. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A

Bài tập 23. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A

Bài tập 24. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.

Bài tập 25. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.

Bài tập 26. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A

Bài tập 27. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B

Bài tập 28. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A

Bài tập 29. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.

Bài tập 30. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A

Bài tập 31.

a. Đặt $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x-1}}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 2$ với mọi n và $\lim x_n = 2$, ta có $f(x_n) = \frac{3x_n+2}{\sqrt{x_n-1}}$.

Do đó:

$$\lim_{x\to2}\frac{3x+2}{\sqrt{x-1}} = \lim\frac{3x_n+2}{\sqrt{x_n-1}} = \frac{3\lim x_n+2}{\sqrt{\lim x_n-1}} = \frac{3.2+2}{\sqrt{2-1}} = 8.$$

b. Đặt $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 1$ với mọi n và $\lim x_n = 1$, ta có:

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2-3x_n+1}{x_n-1} = 2x_n - 1.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1} = \lim(2x_n-1) = 2\lim x_n - 1 = 2-1 = 1.$$

c. Đặt $f(x) = \frac{2x+2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq -1$ với mọi n và $\lim x_n = -1$, ta có:

$$f(x_n) = \frac{2x_n+2}{x_n^3+3x_n^2+3x_n+1} = \frac{2}{(x_n+1)^2}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x+2}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim\frac{2}{(x_n+1)^2} = \frac{2}{(\lim x_n+1)^2} = +\infty.$$

d. Đặt $f(x) = x.\sin\frac{1}{x}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$, ta có $f(x_n) = x_n.\sin\frac{1}{x_n}$.

Nhận xét rằng:

$$|f(x_n)| = \left|x_n.\sin\frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n| \text{ và } \lim|x_n| = 0 \text{ nên } \lim f(x_n) = 0.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to0}f(x) = \lim_{x\to0}\left(x.\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Bài tập 32.

a. Đặt $f(x) = \frac{2}{3x+1}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq -\frac{1}{3}$ với mọi n và $\lim x_n = +\infty$, ta có $f(x_n) = \frac{2}{3x_n+1}$.

Do đó:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1}=\lim\frac{2}{3x_n+1}=\frac{2}{3\lim x_n+1}=0.$$

b. $+\infty$.

Bài tập 33.

a. Đặt $f(x) = \cos x$. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = 2n\pi \Rightarrow x_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \cos(x_n) = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

- $y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow y_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \cos(y_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ không tồn tại.

b. Đặt f(x) = sin3x. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = -n\pi \Rightarrow x_n \to -\infty$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \sin(3x_n) = \sin(-3n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- $y_n = \frac{\pi}{6} - 2n\pi \Rightarrow y_n \to -\infty$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \sin(3y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-6n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin 3x$ không tồn tại.

Bài tập 34.

a. Đặt $f(x) = \cos\frac{1}{x}$. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được $f(x_n) = \cos\frac{1}{x_n} = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$

- $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được $f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ không tồn tại.

b. Đặt $f(x) = \sin\frac{1}{x-1}$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \frac{1}{n\pi} + 1 \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n-1} = \sin(n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- $y_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi} + 1 \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n + 1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \sin\dfrac{1}{x-1}$ không tồn tại.

Bài tập 35. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A.
Bài tập 36. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). B.
Bài tập 37. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). A.
Bài tập 38. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). C; c). C; d). C.
Bài tập 39. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \le M$ với mọi $x \ne 0$ suy ra:

$$|f(x)| \le M.|x| \text{ và } \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Do đó:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = M.0 = 0.$$

Bài tập 40. Đáp số trắc nghiệm C.
Bài tập 41. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A.
Bài tập 42. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). B; c). D.
Bài tập 43. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C.
Bài tập 44. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C; c). C.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (|x| + 1) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 1) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1.$$

Nhận xét rằng $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1.$

Bài tập 45. Đáp số trắc nghiệm A.
Bài tập 46. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D.
Bài tập 47. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). A.
Bài tập 48.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Vì:

$$\lim_{x \to 0} (x - 1) = -1; \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \text{ và } x^2 > 0 \text{ với } x \ne 0$$

nên $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty.$

b. Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 49. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D. **Bài tập 52.** Đáp số trắc nghiệm a). C; b). A

Bài tập 50. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A. **Bài tập 53.** Đáp số trắc nghiệm a). A; b). C

Bài tập 51. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D. **Bài tập 54.** Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B

Bài tập 55.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

b. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{2x-x^2-1}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x(\sqrt{2x-x^2}+1)}=0.$$

Bài tập 56.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to3}\frac{(6-2x)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-2(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}}=-3.$$

Bài tập 57.

a. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)+(x+1)-\sqrt[3]{1.+3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

Ta đi xác định từng giới hạn :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{[\sqrt{1+2x}+(x+1)]x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^3-1-3x}{[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}]x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}=1.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta đặt $t = \sqrt[4]{4x-3}$ suy ra $x = \frac{1}{4}(t^4+3)$ và khi $x \to 1$ thì $t \to 1$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\frac{1}{4}(t^4+3)-1} = \lim_{t\to 1}\frac{4(t-1)}{t^4-1} = \lim_{t\to 1}\frac{4}{t^3+t^2+t+1} = 1.$$

Bài tập 58.

a. Ta đi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}}} = -1.$$

Vậy, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

b. Ta đi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= 1.$$

Vậy, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

Bài tập 59.

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+\tan^2 x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}.\frac{\tan x}{\sin x}\right) = 2+1 = 3.$$

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 60. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 61. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Bài toán 2: Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng.

Phương pháp chung

Sử dụng công thức:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 21. Tính vi phân của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

A. $dy = \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx$. **C.** $dy = \sqrt{2x + 1}\,dx$.

B. $dy = \dfrac{(2x + 1)dx}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. **D.** $dy = \dfrac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

b. $y = \dfrac{2x + 1}{3x + 2}$.

A. $dy = \dfrac{2}{3}dx$. **C.** $dy = \dfrac{(2x + 1)dx}{3x + 2}$.

B. $dy = \dfrac{dx}{(3x + 2)^2}$. **D.** $dy = \dfrac{dx}{3x + 2}$.

Bài tập 22. Tính vi phân của các hàm số sau:

a. $y = \tan^2 x$.

A. $dy = \dfrac{\tan x.dx}{\cos^2 x}$. **C.** $dy = \dfrac{\tan x.dx}{\sin^2 x}$.

B. $dy = \dfrac{2\tan x.dx}{\cos^2 x}$. **D.** $dy = \dfrac{2\tan x.dx}{\sin^2 x}$.

b. $y = \sin x.\sin 2x$.

A. $dy = (\cos x.\sin 2x - 2\sin x.\cos 2x)dx$. **C.** $dy = (2\cos x.\sin 2x + \sin x.\cos 2x)dx$.

B. $dy = (2\cos x.\sin 2x - \sin x.\cos 2x)dx$. **D.** $dy = (\cos x.\sin 2x + 2\sin x.\cos 2x)dx$.

Bài tập 23. Chứng minh rằng nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thì tại điểm đó ta có:

a. $d(uv) = vdu + udv$.

b. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Bài tập 24. Tính gần đúng các giá trị sau:

a. $\sqrt{4,01}$.

A. 2,0025. **B.** 2,0125. **C.** 2,1025. **D.** 2,1125.

b. $\sqrt[3]{215}$.

A. 5,961. **B.** 5,971. **C.** 5,981. **D.** 5,991.

Bài tập 25. Tính gần đúng giá trị $\cos 46^0 + \sin 91^0$.

A. 1,6925. **B.** 1,6945. **C.** 1,6965. **D.** 1,6985.

§ 5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) *của hàm số* $y = f(x)$, *kí hiệu là* $y^{(n)}$ *hay* $f^{(n)}(x)$ *là đạo hàm cấp* $(n - 1)$ *của hàm số* $y = f(x)$, *tức là*:

$$f^{(n)}(x) = [\, f^{(n-1)}(x)]'.$$

1. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t *là đạo hàm cấp hai của hàm số* $s = f(t)$ *tại* t.

$$\gamma(t) = f''(t).$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính đạo hàm cấp cao.

Phương pháp chung

Sử dụng định nghĩa về đạo hàm cấp cao.

Bài toán 2: Tìm công thức đạo hàm cấp n.

Phương pháp chung

Với hàm số $y = f(x)$, để tìm được công thức $f^{(n)}(x)$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính $f'(x)$, $f''(x)$ (đôi khi cần tính tới $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$).

Bước 2: Dự đoán công thức tổng quát $f^{(n)}(x)$.

Bước 3: Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý:

1. Cần nhớ các công thức cơ bản sau:
   a. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)...(m-n+1).x^{m-n}$.
   b. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
   c. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.
2. *Công thức Lepnit*: Nếu u và v là các hàm khả vi n lần thì:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(i)}.v^{(n-i)}.$$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 26. Tính đạo hàm cấp hai các hàm số:

a. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

A. $y^{(2)} = 1$. **B.** $y^{(2)} = \dfrac{-4}{(x+1)^3}$. **C.** $y^{(2)} = 0$. **D.** $y^{(2)} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

b. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-2}$.

A. $y^{(2)} = 2x - 3$. **C.** $y^{(2)} = 2$.

B. $y^{(2)} = \dfrac{2}{(x-2)^3}$. **D.** $y^{(2)} = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Bài tập 27. Chứng tỏ rằng hàm số $y = a\cos x + b\sin x$, trong đó a, b là các hằng số tuỳ ý, thoả mãn phương trình:

$$y'' + y = 0.$$

Bài tập 28. Giả sử hàm số f(x) xác định và có đạo hàm cấp hai khi $x \le x_0$. Xác định các số a, b, c để hàm số :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \le x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c & \text{khi } x > x_0 \end{cases}$$

cũng có đạo hàm cấp hai.

Bài tập 29. Cho hàm số:

$$y = \cos x.$$

Chứng minh rằng $y^{(n)} = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$.

Bài tập 30. Cho hàm số :

$$y = \frac{2x+3}{x^2 + 3x + 2}.$$

a. Tìm a, b sao cho $y = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$.

A. $a = b = 1$. **C.** $a = b = 2$.

B. $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = \dfrac{5}{2}$. **D.** $a = \dfrac{5}{2}$ và $b = \dfrac{3}{2}$.

b. Tính $y^{(n)}$.

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG V

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (6 điểm):

a. (1 điểm): Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x_0 tương ứng:

$$f(x) = x + 2 \text{ với } x_0 = 6.$$

A. $f'(6) = 8$. **B.** $f'(6) = 4$. **C.** $f'(6) = -4$. **D.** $f'(6) = 1$.

b. (2 điểm): Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0.$$

A. $f'(0) = 1$. **B.** $f'(0) = -1$. **C.** $f'(0) = 0$. **D.** $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

c. (2 điểm): Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ tại điểm } x_0 = 0.$$

A. $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = 2$. **D.** $f'(0) = 4$.

d. (1 điểm): Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

(C): $y = x^2 - x + 1$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1$, $x_N = 2$.

A. $k = 1$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = \dfrac{7}{2}$.

Câu II. (2 điểm):

a. (1 điểm): Tìm đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{2x - 1}$.

A. $y' = \dfrac{1}{2x-1}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2}$. **C.** $y' = 0$. **D.** $y' = \dfrac{2}{(2x-1)^2}$.

b. (1 điểm): Hãy giải phương trình y' = 0, biết:

$$y = -\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x + x + 3.$$

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \pi + 2k\pi$.

B. $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \pi + 2k\pi$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

Câu III. (1 điểm): Tính gần đúng giá trị $\sqrt{9{,}011}$.

Câu IV. (1 điểm): Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Chứng minh rằng:

$$y^{(n)} = -2^{n-1}\sin[2x + (n-1).\frac{\pi}{2}].$$

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (6 điểm):

a. (1 điểm): Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \text{ tại điểm } x_0 = -1.$$

A. $f'(-1) = 2$. **B.** $f'(-1) = 1$. **C.** $f'(-1) = 0$. **D.** $f'(-1) = -3$.

b. (2 điểm): Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0.$$

A. $f'(0) = -1$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = 2$. **D.** $f'(0) = 3$.

c. (2 điểm): Tìm a để hàm số sau có đạo hàm tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

A. $a = \frac{1}{2}$. **B.** $a = 0$. **C.** $a = -1$. **D.** Vô nghiệm.

d. (1 điểm): Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

(C): $y = x^3 - x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 0$, $x_N = 3$.

A. $k = 8$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = \frac{5}{4}$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Câu II. (2 điểm):

a. (1 điểm): Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{6}{x^2 + 3x + 4}$.

A. $y' = \frac{6}{x^2 + 3x + 4}$.

B. $y' = \frac{6}{x + 3}$.

C. $y' = 0$.

D. $y' = \frac{12x + 18}{(x^2 + 3x + 4)^2}$.

b. (1 điểm): Hãy giải phương trình $1 + \text{tg}x + 2y'\sqrt{2} = 0$, biết $y = \cos x$.

A. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu III. (1 điểm): Tính gần đúng giá trị $\sqrt{16{,}02}$.

Câu IV. (1 điểm): Cho hàm số $y = \sin x$. Chứng minh rằng $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow \text{Hàm số liên tục tại điểm } x_0 = 0.$$

b. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2} = 0.$$

Bài tập 3. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Để hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm $x_0 = 1$, trước hết f(x) phải liên tục tại $x_0 = 1$, do đó:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 = a + b - 1 \Leftrightarrow b = 2 - a. \qquad (1)$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số y = f(x) tại điểm x = 1.

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số y = f(x) tại điểm x = 1.

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+ax+b-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+ax+1-a}{x-1} = a-2.$$

Hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow a - 2 = 2 \Leftrightarrow a = 4. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được b = –2.

Vậy, với a = 4, b = –2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 4.

a. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Cho x một số gia Δx, ta lần lượt có:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{x+\Delta x-1}{x+\Delta x+1} - \frac{x-1}{x+1} = -\frac{2\Delta x}{(x+1)(x+\Delta x+1)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{(x+1)(x+\Delta x+1)} = \frac{2}{(x+1)(x+\Delta x+1)}.$$

Do đó:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{(x+1)(x+\Delta x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Vậy, hàm số có $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

b. Đáp số trắc nghiệm C.

Bài tập 5. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). D; c). A; d). B.

Bài tập 6. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.

Bài tập 7. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.

Bài tập 8. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). D.

Bài tập 9. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C.

Bài tập 10. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). C.

Bài tập 11. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). B.

Bài tập 12. Hàm số xác định trên D = **R**.

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta có ngay:

$$y' = \frac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{(x^2-x+1)'}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$

b. Trước tiên, chúng ta đi giải phương trình:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x^2+x+1} = (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)(2x+1) > 0\\ (2x-1)^2(x^2+x+1) = (2x+1)^2(x^2-x+1)\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Mặt khác, ta có y'(0) = 1 > 0.

Vậy, ta nhận được kết luận:

- y' > 0 với mọi x.
- Không tồn tại x để y' < 0.

Bài tập 13. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). A.

Bài tập 14. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 15.

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Đặt $f(x) = 2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}$, ta có :

$$f(0) = 0,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{13}{12}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{13}{12}.$$

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 16.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Ta có ngay y' = 5cosx + 3sinx.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng qui tắc tính đạo hàm của một thương, ta có:

$$y' = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Cách 2: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Bài tập 17.

a. **Đáp số trắc nghiệm** A.

b. **Đáp số trắc nghiệm** B.

c. **Đáp số trắc nghiệm** C.

Lời giải tự luận: **Biến đổi** hàm số về dạng:

$$y = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})(1 + \sin x)}{\sin x} = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2}{\sin x}$$

$$= \frac{2\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sin x} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sin x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x} = \cot x$$

Do đó:

$$y' = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

d. **Đáp số trắc nghiệm** D.

Lời giải tự luận: Ta có ngay:

$$y' = \cos\sqrt{2x+1} + x.(\cos\sqrt{2x+1})' = \cos\sqrt{2x+1} + x.(-\sin\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+1})'$$

$$= \cos\sqrt{2x+1} + x.(-\sin\sqrt{2x+1}).\frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \cos\sqrt{2x+1} - \frac{x.\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Bài tập 18. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Ta có ngay:

$$y' = \sin x + \cos x - \sin 2x + 1.$$

Khi đó, phương trình $y' = 0$ có dạng:

$$\sin x + \cos x - \sin 2x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: **Đặt** $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin 2x = t^2 - 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt $z = \frac{\pi}{4} - x$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \sin 2(\frac{\pi}{4} - z) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \sin(\frac{\pi}{2} - 2z) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \cos 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - (2\cos^2 z - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 z + \sqrt{2}\cos z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos z = \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ x = \pi - 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 19. Xét hàm số

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Ta có :

$$A'_x = 2\sin(x - \frac{2\pi}{3}).\cos(x - \frac{2\pi}{3}) + 2\sin x.\cos x + 2\sin(x + \frac{2\pi}{3}).\cos(x + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sin(2x - \frac{4\pi}{3}) + \sin 2x + \sin(2x + \frac{4\pi}{3})$$

$$= 2\sin 2x.\cos\frac{4\pi}{3} + \sin 2x = -\sin 2x + \sin 2x = 0$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $A = A(0) = \frac{3}{2}$.

Vậy, ta được $A = \frac{3}{2}$ không phụ thuộc vào x.

Bài tập 20.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

b. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Viết lại giới hạn dưới dạng:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan 2x.\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\cot 2x}.$$

Sử dụng hai hàm số f(x) và g(x), trong đó:

- Đặt $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$, ta có:

$$f(\frac{\pi}{4}) = 0 \text{ và } f'(x) = -\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - x)} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -1.$$

- Đặt $g(x) = \cot 2x$, ta có:

$$g(\frac{\pi}{4}) = 0 \text{ và } g'(x) = -\frac{2}{\sin^2 2x} \Rightarrow g'(\frac{\pi}{4}) = -2.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}}{\dfrac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}} = \frac{f'(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 21. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B.
Bài tập 22. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). D.
Bài tập 23.

a. Ta có:

$$d(uv) = (uv)'_x dx = (u'_x v + uv'_x)dx = u'_x v dx + uv'_x dx$$
$$= v(u'_x dx) + u(v'_x dx) = vdu + udv, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{(vu' - uv')dx}{v} = \frac{vu'dx - uv'dx}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 24.

a. **Đáp số trắc nghiệm A.**

Lời giải tự luận: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Khi đó:

$$\sqrt{4{,}01} = f(4 + 0{,}01) \approx f(4) + f'(4).0{,}01 = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}.0{,}01 = 2{,}0025.$$

b. **Đáp số trắc nghiệm D.**

Lời giải tự luận: Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Khi đó:

$$\sqrt[3]{215} = f(216 - 1) \approx f(216) - f'(216).1 = 6 - \frac{1}{108} = 5{,}991.$$

Bài tập 25. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 26.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} = 2(x+1)^{-2} \Rightarrow y'' = -2.2(x+1)^{-3} = \frac{-4}{(x+1)^3}.$$

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x - 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 1 - (x-2)^{-2} \Rightarrow y'' = 2(x-2)^{-3} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Bài tập 27. Lấy đạo hàm liên tiếp hai lần, ta được:

$$y' = -a\sin x + b\cos x,\ y'' = -a\cos x - b\sin x = -y.$$

Do đó:

$$y'' + y = -y + y = 0.$$

Bài tập 28. Trước hết hàm số F(x) phải có đạo hàm cấp 1 tại điểm $x_0 \Leftrightarrow$ các đạo hàm một phía tại điểm liên tục x_0 của hàm F(x) phải bằng nhau.

Bởi vậy cần có:

$f(x_0) = c$ (tính liên tục của hàm F(x)).

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) = b, \text{ tức là } F'(x_0) = b.$$

Tiếp theo, để có đạo hàm cấp hai cần có :

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f'_-(x_0 + \Delta x) - f'_-(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2a\Delta x + b - b}{\Delta x} = 2a.$$

Vậy, điều kiện là:

$$a = \frac{1}{2} f''_-(x_0),\ b = f'_-(x_0) \text{ và } c = f(x_0).$$

Bài tập 29. Chứng minh bằng quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Bài tập 30.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

b. Từ kết quả câu a), ta nhận được:

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow \text{Dự đoán } y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Bạn đọc tự giải đề kiểm tra cuối chương

PHẦN II: HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§ 1. PHÉP DỜI HÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

***Định nghĩa 1**: Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất M' của mặt phẳng, điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.*

Nếu ta kí hiệu một phép biến hình nào đó là f thì:

- M' = f(M).
- Nếu **H** là một hình nào đó thì tập hợp các điểm M' = f(M), với M ∈ **H**, tạo thành hình **H'**, ta viết **H'** = f(**H**).

2. PHÉP DỜI HÌNH

***Định nghĩa 2**: Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, tức là: với bất kì hai điểm* M, N *và ảnh* M', N' *của chúng, ta luôn có* MN = M'N'.

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP DỜI HÌNH

***Định lí**: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng*

Hệ quả: Phép dời hình biến:

- Đường thẳng thành đường thẳng.
- Tia thành tia.
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Tam giác thành tam giác bằng nó.
- Đường tròn thành đường tròn bằng nó.
- Phép dời hình bảo toàn độ lớn của góc.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hai điểm phân biệt A, B và f là một phép dời hình biến A thành A, B thành B, tức là f(A) = A, f(B) = B. Khẳng định nếu điểm M nằm trên đường thẳng AB thì f(M) = M là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 2: Cho I là trung điểm đoạn thẳng AB và f là một phép dời hình sao cho f(A) = B, f(B) = A. Chứng minh rằng:

a. f(I) = I.

b. f biến điểm M của đường thẳng AB ($M \neq I$) thành điểm M' sao cho I là trung điểm đoạn thẳng MM'.

Bài tập 3: Giả sử phép dời hình f biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Chứng minh rằng:

a. Trọng tâm ΔABC biến thành trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

b. Trực tâm ΔABC biến thành trực tâm $\Delta A'B'C'$.

c. Tâm đường tròn ngoại tiếp (nội tiếp) ΔABC biến thành tâm đường tròn ngoại tiếp (nội tiếp) $\Delta A'B'C'$.

Bài tập 4: Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C. Biết rằng phép dời hình f biến A, B, C lần lượt thành A', B', C'. Với M là điểm bất kì, hãy nêu cách xác định điểm M' = f(M).

Bài tập 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α cho trước, xét phép biến hình f biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') trong đó:

$$\begin{cases} x' = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha \\ y' = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha \end{cases}.$$

Cho hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép f.

a. Hãy tìm toạ độ của điểm M'.

A. $M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)$.

B. $M'(x_1.\cos\alpha + y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)$.

C. $M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha - y_1.\cos\alpha)$.

D. $M'(x_1.\cos\alpha + y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha - y_1.\cos\alpha)$.

b. Hãy tìm toạ độ của điểm N'.

A. $N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha)$

B. $N'(x_2.\cos\alpha + y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha)$.

C. $N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha - y_2.\cos\alpha)$.

D. $N'(x_2.\cos\alpha + y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha - y_2.\cos\alpha)$.

c. Tính khoảng cách d giữa M và N.

A. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **C.** $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

B. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$. **D.** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

d. Tính khoảng cách d' giữa M' và N'.

A. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **C.** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

B. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **D.** $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

e. Phép f có phải là phép dời hình hay không ?

A. Có. **B.** Không.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây:

a. Phép biến hình f_1 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(y; -x)$.

b. Phép biến hình f_2 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(2x; y)$.

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình ?

Bài tập 7: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ sao cho:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}.$$

trong đó $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ và $ab + cd = 0$.

Chứng tỏ rằng f là phép dời hình.

Bài tập 8: Cho đường thẳng a và điểm I nằm trên nó. Gọi f là phép dời hình biến a thành a và I là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành điểm M' sao cho I là trung điểm MM'.

Bài tập 9: Chứng minh rằng nếu phép dời hình f biến mỗi đường thẳng a thành đường thẳng a' vuông góc với a thì f có điểm duy nhất biến thành chính nó.

Bài tập 10: Có hay không một phép dời hình f sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó ?

A. Có. **B.** Không.

§ 2. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

***Nhắc lại**: Điểm* **M'** *được gọi là đối xứng với điểm* M *qua đường thẳng* a *nếu* a *là đường trung trực của đoạn thẳng* MM'.

Trường hợp đặc biệt, nếu M *nằm trên* a *thì ta xem* M *đối xứng với chính nó qua* a.

***Định nghĩa 1**: Phép đối xứng qua đường thẳng* a *là phép biến hình biến mỗi điểm* **M** *thành* **M'** *đối xứng với* M *qua đường thẳng* a.

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Vậy:

$M' = Đ_a(M) \Leftrightarrow$ a là trung trực đoạn MM'.

Chú ý: Ta luôn có:

- $M' = Đ_a(M) \Rightarrow M = Đ_a(M')$.
- $M \in a \Rightarrow Đ_a(M) = M$.

Định lí: Phép đối xứng trục là phép dời hình.

2. TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

***Định nghĩa 2**: Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình* **H** *nếu phép đối xứng trục* $Đ_d$ *biến* **H** *thành chính nó, tức là* $Đ_d(H) = H$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm trục đối xứng của một hình cho trước.

Phương pháp chung

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đối xứng trục.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

Phương pháp chung

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H}_1)$ là ảnh của $(\mathbf{H}_2)$ qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_1)$, ta đi chứng minh $M_2 = Đ_a(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_2)$, ta đi chứng minh $M_1 = Đ_a(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép đối xứng trục để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép đối xứng trục để giải các yêu cầu của bài toán.

Bài toán 3: Sử dụng phép đối xứng trục tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Phương pháp chung

Bằng việc lựa chọn phép đối xứng trục thích hợp cho điểm M, ta đưa bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về các biểu thức độ dài, khi đó ta cần nhớ các kết quả:

- $MA + MB \geq AB$.
- $|MA - MB| \leq AB$.

Bài toán 4: Tìm tập hợp điểm M.

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép đối xứng trục $Đ_a$, biến điểm E di động thành điểm M .

Bước 2: Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép đối xứng trục $Đ_a$.

Bài toán 5: Dựng hình.

Phương pháp chung

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 11: Tìm trục đối xứng của những hình sau đây, mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái:

MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE,

COACH, TO BE, IS, IT, SOS, CHEO

Bài tập 12: Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a. Khi nào thì d song song với d' ?

A. d // a. **C.** d cắt a.

B. d ≡ a hoặc d ⊥ a. **D.** $g(d, a) = 45^0$.

b. Khi nào thì d trùng với d' ?

A. d // a. **C.** d cắt a.

B. d ≡ a hoặc d ⊥ a. **D.** $g(d, a) = 45^0$.

c. Khi nào thì d cắt d' ?

A. d // a. **C.** d cắt a.

B. d ≡ a hoặc d ⊥ a. **D.** $g(d, a) = 45^0$.

Giao điểm của d và d' có tính chất gì ?

d. Khi nào thì d vuông góc với d' ?

A. d // a. **C.** d cắt a.

B. d ≡ a hoặc d ⊥ a. **D.** $g(d, a) = 45^0$.

Bài tập 13: Qua phép đối xứng trục $Đ_a$.

a. Những tam giác nào biến thành chính nó ?

b. Những đường tròn nào biến thành chính nó ?

Bài tập 14: Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 15: Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài tập 16: Lấy một điểm M trên đường phân giác ngoài góc C của ΔABC. Chứng minh rằng MA + MB > CA + CB.

Bài tập 17: Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h, hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp nhỏ nhất.

Bài tập 18: Cho ΔABC nhọn, D là điểm cố định trên BC. Tìm hai điểm E, F theo thứ tự thuộc AB và AC sao cho ΔDEF có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 19: Cho ΔABC nhọn.

a. Tìm ba điểm D, E, F theo thứ tự thuộc BC, AB và AC sao cho ΔDEF có chu vi nhỏ nhất.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔDEF theo các cạnh a, b, c của ΔABC.

A. $\frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$. **C.** $\frac{6p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

B. $\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$. **D.** $\frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Bài tập 20: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), hai đỉnh B và D trên (d).

§ 3. PHÉP TỊNH TIẾN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

***Định nghĩa**: Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$ là một phép dời hình biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.*

***Chú ý**:*

1. Phép tịnh tiến theo vectơ 0 còn được gọi là *phép đồng nhất*.
2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(a; b)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm vectơ tịnh tiến $\vec{v}$ biến hình $(\mathbf{H_1})$ thành hình $(\mathbf{H_2})$.

Phương pháp chung

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép tịnh tiến.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

Phương pháp chung

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh $M_2 = T_{\vec{v}}(M_1) \in (\mathbf{H_2})$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh $M_1 = T_{\vec{v}}(M_2) \in (\mathbf{H_1})$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép tịnh tiến để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép tịnh tiến để giải các yêu cầu của bài toán.

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp $(\mathbf{H})$ của các điểm E.

Bước 3: Vậy tập hợp các điểm M là ảnh của $(\mathbf{H})$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Bài toán 4: Dựng hình.

Phương pháp chung

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 21: Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a. Khi nào thì d trùng với d' ?

A. $\vec{v}$ có giá song song với d. **C.** $\vec{v}$ có giá vuông góc với d.

B. $\vec{v}$ có giá không song song với d. **D.** Không tồn tại.

b. Khi nào thì d song song với d' ?

A. $\vec{v}$ có giá song song với d. **C.** $\vec{v}$ có giá vuông góc với d.

B. $\vec{v}$ có giá không song song với d. **D.** Không tồn tại.

c. Khi nào thì d cắt d' ?

A. $\vec{v}$ có giá song song với d. **C.** $\vec{v}$ có giá vuông góc với d.

B. $\vec{v}$ có giá không song song với d. **D.** Không tồn tại.

Bài tập 22: Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.

Bài tập 23: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song. Gọi $Đ_1$ và $Đ_2$ lần lượt là các phép đối xứng trục qua d_1 và d_2. Với điểm M bất kì, giả sử $Đ_1(M) = M_1$ và $Đ_2(M_1) = M_2$. Chứng minh rằng phép biến hình biến M thành M_2 là một phép tịnh tiến.

Bài tập 24: Cho phép đối xứng trục Đ qua đường thẳng d và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$. Với mỗi điểm M, ta lấy $M_1 = Đ(M)$ và $M' = T(M_1)$. Xét phép biến hình f biến M thành M'.

a. Phép biến hình f có phải là phép dời hình không ?

A. Có. **B.** Không.

b. Hãy vẽ một ΔABC rồi vẽ ảnh của nó qua phép f.

c. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng MM', trong đó $M = f(M)$, luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 25: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y = ax^2$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(m; n)$ và (P') là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến đó. Hãy viết phương trình của (P').

A. (P'): $(y - n) = a(x - m)^2$. **C.** (P'): $(y + n) = a(x + m)^2$.

B. (P'): $(y + n) = a(x - m)^2$. **D.** (P'): $(y + n) = a(x + m)^2$.

Bài tập 26: Tìm phương trình của đường thẳng (d') là ảnh của đường thẳng (d): $x + 3y - 2 = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1; 1)$.

Bài tập 27: Tứ giác ABCD có $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 60^0$.

a. Tìm số đo góc $\widehat{BCD}$.

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 120^0. **D.** 150^0.

b. Tìm số đo góc $\widehat{ABC}$.

A. 150^0. **B.** 120^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Bài tập 28: Cho hai đường tròn bằng nhau (O_1, R) và (O_2, R) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng (d) vuông góc với AB và cắt (O_1, R) tại C và D, cắt (O_2, R) tại E và F với $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{EF}$.

a. Chứng minh độ lớn $\widehat{CAE}$ không phụ thuộc vào vị trí của (d)

b. Tính độ dài đoạn CE theo R và AB = a.

A. $\sqrt{R^2 - a^2}$. **B.** $\sqrt{2R^2 - a^2}$. **C.** $\sqrt{4R^2 - a^2}$. **D.** $\sqrt{6R^2 - a^2}$.

Bài tập 29: Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại hai điểm, gọi A là một giao điểm. Đường thẳng (d) di động qua A và cắt hai đường tròn đã cho tại M và N. Trên hai tia AM và AN lấy hai điểm B và C sao cho $2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$. Tìm quỹ tích các điểm B và C.

Bài tập 30: Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết hai đường chéo AC = a, BD = b, góc ABC = α và đường trung bình MN = c.

§ 4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP QUAY

Định nghĩa: *Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = α được gọi là phép quay tâm O với góc quay α.*

Kí hiệu Q_O^α hay $Q(O; \alpha)$.

Định lí: Phép quay là một phép dời hình

2. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Định nghĩa: Phép đối xứng qua điểm O là một phép dời hình biến mỗi điểm M thành M' đối xứng với M qua O, tức là $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Kí hiệu $Đ_O$ hay S_O.

Chú ý:

1. Phép quay tâm O, góc quay $\alpha = 180^0$ là phép đối xứng tâm O.
2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Tâm đối xứng của một hình: *Điểm O được gọi là tâm đối xứng của hình **H** nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình **H** thành chính nó, tức là $Đ_O$(**H**) = **H**.*

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm tâm đối xứng của một hình cho trước.

Phương pháp chung

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đối xứng tâm.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

Phương pháp chung

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh ($\mathbf{H_1}$) là ảnh của ($\mathbf{H_2}$) qua phép quay tâm O với góc quay α (hoặc qua phép đối xứng tâm O), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc ($\mathbf{H_1}$), ta đi chứng minh $M_2 = Q_O^\alpha(M_1) \in (\mathbf{H_2})$ (hoặc $M_2 = S_O(M_1) \in (\mathbf{H_2})$).

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc ($\mathbf{H_2}$), ta đi chứng minh $M_1 = Q_O^\alpha(M_2) \in (\mathbf{H_1})$ (hoặc $M_1 = S_O(M_2) \in (\mathbf{H_1})$).

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép quay (hoặc phép đối xứng tâm) để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép quay để giải các yêu cầu của bài toán.

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

Phương pháp chung

Bước 1: Tìm một phép quay Q_O^α (hoặc phép đối xứng tâm S_O), biến điểm E di động thành điểm M .

Bước 2: Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép quay Q_O^α (hoặc phép đối xứng tâm S_O).

Bài toán 4: Dựng hình.

Phương pháp chung

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 31: Cho phép quay Q tâm O với góc quay α và cho đường thẳng d.

a. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.

b. Góc hợp bởi hai đường thẳng d và d' có quan hệ với góc α như thế nào ?

Bài tập 32: Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên cạnh AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm ΔOAA' và ΔOBB'. Chứng minh rằng ΔGOG' là tam giác vuông cân.

Bài tập 33: Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh rằng:

a. Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, và O cách đều d và d'.

b. Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

Bài tập 34: Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O.

a. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua $Đ_O$.

b. Cách dựng đó có thể thực hiện được hay không nếu chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

Bài tập 35: Tìm tâm đối xứng của các hình sau đây:

a. Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau.
b. Hình gồm hai đường thẳng song song.
c. Hình gồm hai đường tròn bằng nhau.
d. Đường Elíp.
e. Đường Hypebol.

Bài tập 36: Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài tập 37: Cho đường tròn (O; R), đường thẳng Δ và một điểm I. Tìm điểm A trên (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài tập 38: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ và điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng (Δ) thành đường thẳng (Δ'). Hãy viết phương trình của (Δ').

A. $2Ax - 2By - C - aA - bB = 0$. **C.** $Ax - By - C - 2aA - 2bB = 0$.

B. $2Ax + 2By - C - aA - bB = 0$. **D.** $Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0$.

Bài tập 39: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$. Xác định phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua điểm E(1, 2).

A. $x^2 + (y + 3)^2 = 2$. **C.** $(x + 3)^2 + y^2 = 2$.

B. $x^2 + (y - 3)^2 = 2$. **D.** $(x - 3)^2 + y^2 = 2$.

Bài tập 40: Cho đường tròn (O) với ba dây AB, MN, PQ cắt nhau tại I sao cho IA = IB và M, P nằm cùng phía với AB. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB với PN. Chứng minh rằng IE = IF.

§ 5. HÌNH BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí: Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

Định nghĩa: *Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 41: Theo định nghĩa tổng quát về sự bằng nhau của hai hình, hãy chứng minh rằng:

a. Hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau thì bằng nhau.
b. Hai góc có cùng số đo thì bằng nhau.
c. Hai đường tròn có bán kính bằng nhau thì bằng nhau.

Bài tập 42: Chứng tỏ rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.

Bài tập 43: Các điều kiện sau đây có phải là điều kiện cần và đủ để hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau hay không ?

a. Có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau (AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A').

A. Có. **B.** Không.

b. Có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau (chẳng hạn AC = A'C').

A. Có. **B.** Không.

c. Có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau (chẳng hạn $\widehat{B} = \widehat{B'}$).

A. Có. **B.** Không.

Bài tập 44: Đa giác lồi n cạnh gọi là n–giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n–giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

Bài tập 45: Hình $\mathbf{H_1}$ gồm ba đường tròn $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$ và $(O_3; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình $\mathbf{H_2}$ gồm ba đường tròn $(I_1; r_1)$, $(I_2; r_2)$ và $(I_3; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình $\mathbf{H_1}$ và $\mathbf{H_2}$ bằng nhau.

Bài tập 46: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ và $y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$. Chứng minh rằng hai parabol đó bằng nhau.

Bài tập 47: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y = ax^2$ và $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng hai parabol đó bằng nhau.

Bài tập 48: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi (C) và (C') lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ và $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. Chứng minh rằng hai hình (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 49: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi (C) và (C') lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ và $y = g(x) = \dfrac{x^2 + 17x + 70}{x + 6}$. Chứng minh rằng hai hình (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 50: Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành thành hai hình bằng nhau.

§ 6. PHÉP VỊ TỰ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Cho một điểm* O *cố định và một số* k *không đổi* $k \neq 0$. *Phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành điểm* M' *sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *được gọi là phép vị tự tâm* O, *tỉ số* k.

Ký hiệu là V_O^k hoặc V(O; k).

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N' thì:

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN.$$

Định lí 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

Hệ quả: Phép vị tự tỉ số k:

- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó.
- Biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với $|k|$.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- Biến góc thành góc bằng nó.

3. ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN QUA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 3: Phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn.

Tâm vị tự của hai đường tròn: Cho hai đường tròn $(I_1; R_1)$ và $(I_2; R_2)$ với $R_1 \neq R_2$. Có hai phép vị tự $V_{O_1}^k$ và $V_{O_2}^k$ biến $(I_1; R_1)$ thành $(I_2; R_2)$.

Hai tâm vị tự O_1, O_2 và tỉ số k được xác định như sau:

- $k = \pm\frac{R_1}{R_2}$ (k > 0 thì gọi là tâm vị tự ngoài, k < 0 thì gọi là tâm vị tự trong).
- O_1, O_2 ở trên đường thẳng I_1I_2 và $\frac{\overrightarrow{O_1I_2}}{\overrightarrow{O_1I_1}} = \frac{\overrightarrow{O_2I_2}}{\overrightarrow{O_2I_1}} = k$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm phép vị tự biến hình $(\mathbf{H_1})$ thành $(\mathbf{H_2})$.

Phương pháp chung

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

Phương pháp chung

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép vị tự V_O^k, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh $M_2 = V_O^k(M_1) \in (\mathbf{H_2})$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh $M_1 = V_O^k(M_2) \in (\mathbf{H_1})$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép vị tự để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép vị tự để giải các yêu cầu của bài toán.

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép vị tự V_O^k, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép vị tự V_O^k.

Bài toán 4: Dựng hình.

Phương pháp chung

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 51: Các phép sau đây có phải là phép vị tự hay không ?

a. Phép đối xứng tâm.

A. Có. B. Không.

b. Phép đối xứng trục.

A. Có. B. Không.

c. Phép đồng nhất.

A. Có. B. Không.

d. Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$.

A. Có. B. Không.

Bài tập 52: Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

A. Đúng. B. Sai.

b. Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động

A. Đúng. B. Sai.

c. Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

A. Đúng. B. Sai.

Bài tập 53: Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:

a. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

b. Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

c. Một đường tròn chứa đường tròn kia.

Bài tập 54: Cho đường tròn (O,R) đường kính AB. Một đường tròn (O')tiếp xúc với (O) và đoạn AB lần lượt tại C, D, cắt đường thẳng CD tại (O,R) tại I. Chứng minh rằng cung AI = BI.

Bài tập 55: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O'') thay đổi, luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 56: Cho đường tròn (O, R) và một điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc $\widehat{MOI}$ cắt IM tại N. Tìm quĩ tích điểm N.

Bài tập 57: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A. Đường kính vẽ từ A gặp (O) tại B và (O') tại C. Một đường thẳng di động qua A gặp (O) tại M và (O') tại N. Tìm tập giao điểm I của BN và CM.

Bài tập 58: Cho đường tròn (O, R) và một điểm A cố định ở trên đường tròn; BC là một dây cung di động của đường tròn này và BC có độ dài không đổi bằng 2d ($d < R$). Tìm tập hợp trọng tâm G của Δ ABC.

Bài tập 59: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

Bài tập 60: Dựng hình vuông nội tiếp trong một tam giác cho trước (hình vuông nội tiếp tam giác là hình vuông có hai đỉnh ở trên một cạnh, hai đỉnh còn lại ở trên hai cạnh còn lại của tam giác).

§ 7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP ĐỒNG DẠNG

***Định nghĩa**: Phép biến hình* F *gọi là phép đồng dạng tỉ số* k ($k > 0$) *nếu với hai điểm* M *và* N *bất kì và ảnh* M' *và* N' *của chúng ta luôn có* M'N' = kMN.

Định lí: Mọi phép đồng dạng F tỉ số k ($k > 0$) đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

Hệ quả: Phép đồng dạng tỉ số k:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với k.
- Biến góc thành góc bằng nó.

2. HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

***Định nghĩa**: Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.*

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 61: Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng F biến ΔABC thành ΔA'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C'.

Bài tập 62: Cho ΔABC vuông tại A, AC = 2AB. Gọi Q là phép quay tâm A, góc quay $\varphi = (AB, AC)$, V là phép vị tự tâm A tỉ số 2, còn F là phép hợp thành của V và Q.

a. Tìm ảnh của các điểm A, B, C qua phép F.
b. Phép F biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn nào ?
c. Chứng minh rằng với mỗi điểm M nằm trên đường tròn tâm B bán kính BA (M khác A), có một điểm N nằm trên đường tròn tâm C bán kính CA sao cho ΔAMN đồng dạng với ΔABC.
d. Chứng tỏ rằng F cũng là phép hợp thành của Q và V.

Bài tập 63: Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; 2R) tiếp xúc ngoài với nhau tại O, d là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số 2, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là phép hợp thành của V và Đ.

a. F biến điểm O và I thành những điểm nào ?

b. F biến đường tròn (I; R) thành hình nào ?

c. Với điểm M không nằm trên d và M' = F(M). Chứng minh rằng nếu E là giao điểm của MM' và d thì EM' = 2EM.

d. Chứng tỏ rằng F cũng là phép hợp thành của Đ và V.

Bài tập 64: Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Bài tập 65:

a. Chứng minh rằng với hai đoạn thẳng bất kì AB và A'B' luôn có phép đồng dạng biến A thành A' và biến B thành B'.

b. Chứng minh rằng hai đường cônic có cùng tâm sai e thì đồng dạng với nhau.

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (4 điểm):

a. Nêu định nghĩa và các tính chất của phép tịnh tiến.

b. Hãy chỉ ra một hình có vô số trục đối xứng.

Câu II. (3 điểm): Cho ΔABC có AM và CN là các trung tuyến. Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$ thì ΔABC đều.

Câu III. (3 điểm): Cho đường tròn (O, R), A là một điểm cố định không trùng với tâm O, BC là một dây cung của (O), BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng 120^0. Gọi I là trung điểm của BC, vẽ tam giác đều AIJ. Tìm tập hợp điểm J.

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (4 điểm):

a. Nêu định nghĩa và các tính chất của phép quay.

b. Hãy chỉ ra một hình có vô số tâm đối xứng.

Câu II. (3 điểm): Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn (O_1), (O_2) qua M, theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2).

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

b. Tìm tập hợp N khi M di động trên (O).

Câu III. (3 điểm): Qua điểm K lấy trong hình vuông ABCD và đường thẳng cắt các cạnh AB, CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của đường tròn qua K, P, B với đường tròn qua K, Q, D nằm trên đường chéo BD.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Giả sử f(M) = M', ta có nhận xét:

- Vì A, B, M thẳng hàng nên A, B, M' thẳng hàng.
- Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta được:

  MA = M'A và MB = M'B.

Do đó $M' \equiv M$.

Bài tập 2.

a. Giả sử f(I) = I', ta có nhận xét:

- Vì A, B, I thẳng hàng nên B, A, I' thẳng hàng.
- Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta được:

  I'B = IA = IB = I'A, do I là trung điểm AB.

Do đó $I' \equiv I$.

b. Ta có nhận xét:

- Vì A, B, M thẳng hàng nên B, A, M' thẳng hàng.
- Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta được:

  MA = M'B và MB = M'A.

Từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BM'} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{IM'}$$

$\Rightarrow$ IM = IM' $\Rightarrow$ I là trung điểm đoạn thẳng MM'.

Bài tập 3.

a. Gọi M là trung điểm của đoạn BC và G là trọng tâm ΔABC. Giả sử:

f(M) = M' và f(G) = G'.

Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta suy ra:

M' là trung điểm của B'C' $\Rightarrow$ A'M' là trung tuyến. (1)

$$\frac{2}{3} = \frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm ΔA'B'C'.

b. Gọi AA_1, BB_1 là hai đường cao của ΔABC và H là trực tâm ΔABC. Giả sử:

$f(B_1) = B_1'$, $f(A_1) = A_1'$ và f(H) = H'.

- Từ tính chất của phép dời hình, ta suy ra:

  $H' = A_1A_1' \cap B_1B_1'$. (3)
- Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép dời hình, ta suy ra:

  A_1A_1', B_1B_1' là các đường cao của ΔA'B'C'. (4)

Từ (3) và (4) suy ra H' là trực tâm ΔA'B'C'.

c. Ta lần lượt xét:

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử:

  f(O) = O'.

  Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta suy ra:

  O'A' = O'B' = O'C' bởi OA = OB = OC.

  Vậy, điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C'.

- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Giả sử:

  $f(I) = I'$.

  Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép dời hình, ta suy ra:

  $\widehat{I'A'B'} = \widehat{I'A'C} \Rightarrow$ I thuộc đường phân giác của góc $\widehat{A}'$. (5)

  $\widehat{I'B'A'} = \widehat{I'B'C} \Rightarrow$ I thuộc đường phân giác của góc $\widehat{B}'$. (6)

  Từ (3) và (4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'B'C'$.

Bài tập 4. Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta suy ra điểm M' được xác định bởi các điều kiện:

$$M'A' = MA, \qquad M'B' = MB, \qquad M'C' = MC.$$

Bài tập 5.

a. **Đáp số trắc nghiệm A.**

b. **Đáp số trắc nghiệm A.**

c. **Đáp số trắc nghiệm A.**

Lời giải tự luận: Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, ta có ngay:

$$d = MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

d. **Đáp số trắc nghiệm A.**

Lời giải tự luận: Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, ta có ngay:

$$\begin{aligned}(d')^2 = (M'N')^2 &= [(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha) - (x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha)]^2 + \\ &\quad + [(x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha) - (x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)]^2 \\ &= [(x_2 - x_1).\cos\alpha - (y_2 - y_1).\sin\alpha]^2 + [(x_2 - x_1).\sin\alpha + (y_2 - y_1).\cos\alpha]^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2.\cos^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\sin^2\alpha + (x_2 - x_1)^2.\sin^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\cos^2\alpha \\ &= (x_2 - x_1)^2.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (y_2 - y_1)^2.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

e. **Đáp số trắc nghiệm A.**

Lời giải tự luận: Từ (1) và (2) suy ra d = d' (hay MN = M'N').

Vậy, phép biến hình f bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên theo định nghĩa nó là một phép dời hình.

Bài tập 6.

a. Phép biến hình f_1 biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(y_1; -x_1)$, $N'(y_2; -x_2)$.

Khi đó, ta có:

$$M'N' = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (-x_2 + x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN.$$

Vậy, f_1 là một phép dời hình.

b. Phép biến hình f_2 biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(2x_1; y_1)$, $N'(2x_2; y_2)$.

Khi đó, ta có:

$$M'N' = \sqrt{(2x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{4(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \neq MN.$$

Vậy, f_2 không là một phép dời hình.

Bài tập 7. Phép biến hình f biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(ax_1 + by_1 + p; cx_1 + dy_1 + q)$, $N'(ax_2 + by_2 + p; cx_2 + dy_2 + q)$.

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}(M'N')^2 &= [(ax_1 + by_1 + p) - ((ax_2 + by_2 + p)]^2 + \\ &\qquad + [(cx_1 + dy_1 + q) - (cx_2 + dy_2 + q)]^2 \\ &= [a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2)]^2 + [c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2)]^2 \\ &= (a^2 + c^2)(x_1 - x_2)^2 + (b^2 + d^2)(y_1 - y_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = MN^2\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow M'N' = MN$

Vậy, phép biến hình f bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên theo định nghĩa nó là một phép dời hình.

Bài tập 8. Tham khảo bài tập 2.

Bài tập 9. Điểm đó chính là giao điểm của hai đường thẳng a và a'.

Bài tập 10. Đáp số trắc nghiệm B.

Hướng dẫn: Chứng minh bằng phản chứng.

Bài tập 11. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 12.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

c. Đáp số trắc nghiệm C.

Khi đó giao điểm của d và d' nằm trên đường thẳng a.

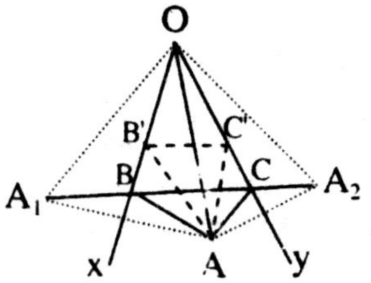
d. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 13.

a. Với ΔABC cân tại A và a là đường trung trực của BC thì $Đ_a(\Delta ABC) = \Delta ACB$.

b. Mọi đường tròn đều biến thành chính nó nếu a đi qua tâm của đường tròn.

Bài tập 14. Trước tiên:



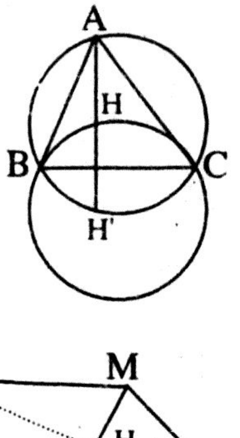
- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox.
- Gọi A_2 là điểm đối xứng với A qua Oy.
- Nối A_1A_2 cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B và C.

Ta sẽ đi chứng minh ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

Thật vậy:

$$\begin{aligned}CV_{\Delta ABC} &= AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 \\ &= A_1A_2 \geq A_1B' + B'C' + C'A_2 \\ &= AB' + B'C' + C'A = CV_{\Delta AB'C'}\end{aligned}$$

Bài tập 15. Giả sử AH cắt đường tròn tại H'.



Ta có:

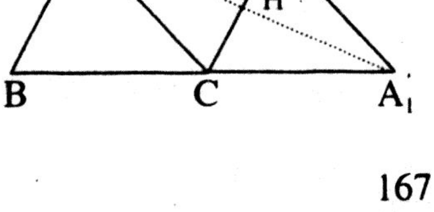
$H'CB = H'AB = HCB \Rightarrow \Delta H'CH$ cân tại C

$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của H'H

$\Rightarrow H = Đ_{BC}(H')$.

Và vì $H' \in (O)$ nên $H \in Đ_{BC}((O))$.

Bài tập 16. Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua phân giác ngoài CM của góc C, ta có:

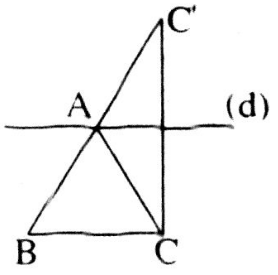


$$\begin{aligned}MA + MB &= MA_1 + MB \\ &> A_1B = CA_1 + CB = CA + CB\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow MA + MB > CA + CB$, đpcm.

Bài tập 17. Không mất tính tổng quát ta giả sử ΔABC có đáy $BC = a$ cố định và độ dài đường cao $AH = h$.

Từ đó suy ra đỉnh A chạy trên đường thẳng (d) song song và cách BC một khoảng bằng h.



Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah = pr \Leftrightarrow r = \frac{ah}{2p}.$$

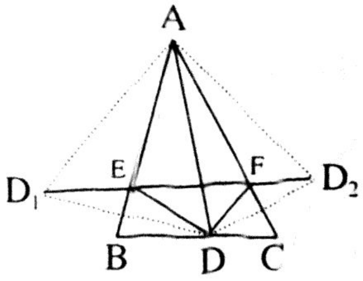
Từ đó, suy ra:

r nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ ΔABC có chu vi nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AB + AC nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ A, B, C' thẳng hàng, với C' là điểm đối xứng với C qua (d).

Bài tập 18. Trước tiên:



- Gọi D_1 là điểm đối xứng với D qua AB.
- Gọi D_2 là điểm đối xứng với D qua AC.

Ta có chu vi ΔDEF được cho bởi:

$$CV_{\Delta DEF} = DE + DF + EF = D_1E + D_2F + EF.$$

Vậy ΔDEF có chu vi nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ $D_1E + D_2F + EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ EF thuộc đường thẳng D_1D_2

$\Leftrightarrow$ E, F theo thứ tự là giao điểm của D_1D_2 với AB, AC.

Khi đó $(CV_{\Delta DEF})_{Min} = D_1D_2$.

Bài tập 19.

a. Như đã biết trong bài tập 18, với điểm D cố định thì

$$(CV_{\Delta DEF})_{Min} = D_1D_2.$$

Do đó, khi D di động trên BC, chu vi ΔDEF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D_1D_2 nhỏ nhất.

Trong ΔAD_1D_2, ta có:

$$AD_1 = AD_2 = AD,\ \widehat{D_1AD_2} = 2\hat{A} \text{ không đổi,}$$

do đó D_1D_2 nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $AD \perp BC$ $\Leftrightarrow$ D là chân đường cao đỉnh A của ΔABC

Vì vai trò của D, E, F như nhau nên ta kết luận được rằng chu vi ΔDEF nhỏ nhất khi và chỉ khi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao của ΔABC.

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Gọi K là trung điểm của D_1D_2, ta có:

$$D_1D_2 = 2D_1K = 2AD_1.\sin\widehat{D_1AK} = 2AD.\sin\hat{A}. \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

suy ra:

$$AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}. \quad (2)$$

$$\sin\hat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$D_1D_2 = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = (CV_{\Delta DEF})_{Min}.$$

Bài tập 20.

a. *Phân tích*: Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD có A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), B và D ở trên (d).

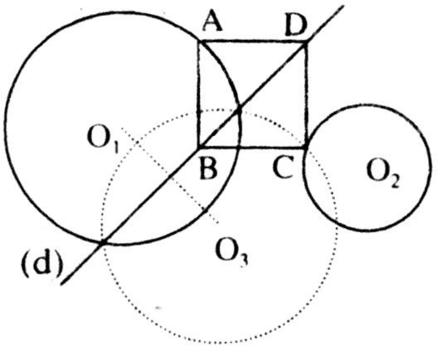
Thực hiện phép đối xứng trục (d).

$Đ_d$: $A \mapsto C$,

$(O_1) \mapsto (O_3)$.

Khi đó $C \in (O_3)$.

Vậy C là một trong hai giao điểm của (O_3) và (O_2).



b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đường tròn (O_3) với $(O_3) = Đ_d[(O_1)]$
- Lấy điểm chung C của (O_3) và (O_2)
- Dựng điểm A với $A = Đ_d(C)$.
- AC cắt (d) tại I
- Trên (d) dựng B và D đối xứng nhau qua I sao cho IB = IC, thì ABCD là hình vuông phải dựng.

c. *Chứng minh*: Theo cách dựng, tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình vuông và:

- $B, D \in (d)$, $C \in (O_2)$.
- Vì $(O_1) = Đ_d[(O_3)]$, $A = Đ_d(C)$, $C \in (O_3)$ nên $A \in (O_1)$

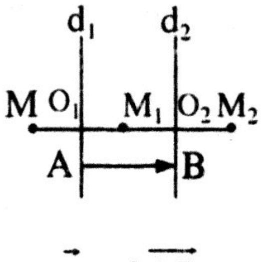
d. *Biện luận*: Số nghiệm hình của bài toán bằng số nghiệm chung của (O_3) và (O_2).

Bài tập 21. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). D.

Bài tập 22. Mọi phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A \in a$ và $B \in b$ đều biến đường thẳng a thành b.

Bài tập 23. Với hai điểm A, B theo thứ tự thuộc d_1, d_2 sao cho AB vuông góc với d_1.

Ta có nhận xét:



$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{O_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1O_2}$$

$$= 2(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2}) = 2\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Vậy, phép biến hình biến M thành M_2 là một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB}$.

Bài tập 24.

a. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Với hai điểm A, B bất kì, ta có:

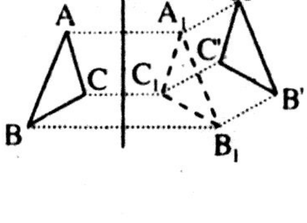
$A_1B_1 = Đ(AB) \Rightarrow A_1B_1 = AB.$ (1)

$A'B' = T(A_1B_1) \Rightarrow A'B' = A_1B_1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A'B' = AB.

Vậy, f là một phép dời hình.

b. Hình vẽ bên.



c. Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là trung điểm của MM_1, MM'. Suy ra:

O_1O_2 là đường trung bình của $\Delta MM_1M'$ $\Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M'} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

Vậy, trung điểm O_2 của các đoạn thẳng MM' luôn thuộc đường thẳng d' cố định là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Bài tập 25. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(m; n)$ biến điểm $M(x_0; y_0) \in (P)$ (ta có $y_0 = ax_0^2$) thành điểm $M'(x; y)$ với:

$$\begin{cases} x = x_0 + m \\ y = y_0 + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x - m \\ y_0 = y - n \end{cases}$$

Do đó, parabol (P') sẽ có phương trình $(y - n) = a(x - m)^2$.

Bài tập 26. Mỗi điểm $M(x, y) \in (d')$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1; 1)$, ta có:

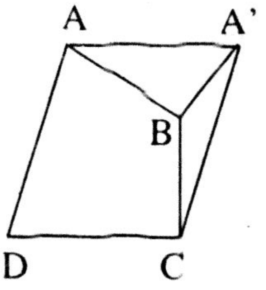
$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ x - x_0 = 1 \\ y - y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 1) + 3(y - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (d').

Bài tập 27. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A.

Lời giải tự luận: Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}: A \mapsto A'$, khi đó tứ giác ADCA' là hình bình hành và $\widehat{BAA'} = 60^0$.



Trong $\Delta ABA'$, ta có:

$\widehat{BAA'} = 60^0$,

$AA' = 2AB$.

Do đó, $\Delta ABA'$ vuông tại B và $\widehat{BA'A} = 30^0$, $A'B = 3$.

Vì $A'B = BC = 3$ nên $\Delta BCA'$ cân tại B, do đó:

$$\widehat{BCA'} = \widehat{BA'C} = \widehat{AA'C} - \widehat{BA'A} = 60^0 - 30^0 = 30^0.$$

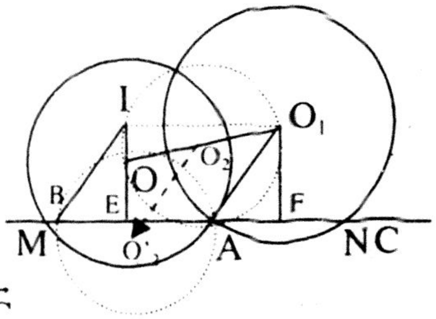
$$\widehat{BCD} = \widehat{A'CD} - \widehat{BCA'} = 120^0 - 30^0 = 90^0.$$

$$\widehat{ABC} = 360^0 - (\widehat{BAD} + \widehat{CDA} + \widehat{BCD}) = 360^0 - (60^0 + 60^0 + 90^0) = 150^0.$$

Bài tập 28.

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Đáp số trắc nghiệm C.



Bài tập 29. Dựng OE và O_1F vuông góc với (d).

Ta có E, F lần lượt là trung điểm các đoạn AM, AN và:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$$

Dựng O_1I vuông góc với OE, khi đó tứ giác O_1IEG là hình chữ nhật

Từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow O_1ABI \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O_1A} \Rightarrow B = T_{\overrightarrow{O_1A}}(I).$$

Vì $\widehat{O'IO}$ vuông nên tập hợp các điểm I là đường tròn (O_2) đường kính OO_1, từ đó suy ra tập hợp các điểm B là đường tròn (O'_2) với

$$(O'_2) = T_{\overrightarrow{O_1A}}[(O_2)].$$

Tương tự ta có tập hợp điểm C là đường tròn (O'_3) với $(O'_3) = T_{\overrightarrow{OA}}[(O_2)]$.

Bài tập 30.

a. *Phân tích*: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

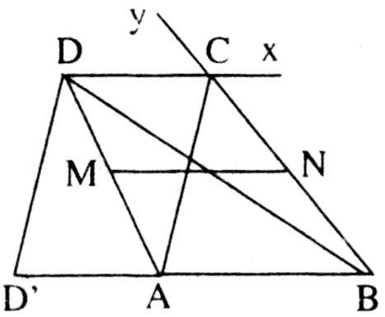
Thực hiện phép tịnh tiến

$T_{\overrightarrow{CA}} : D \mapsto D'$

khi đó tứ giác ACDD' là hình bình hành nên ta có:

BD' = BA + AD' = AB + DC = 2MN = 2c

$\Rightarrow$ ΔBDD' dựng được, (biết 3 cạnh).



b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔBDD' với BD' = 2c, BD = b, DD' = a.
- Dựng Dx//BD'.
- Dựng By hợp với BD' góc α, By cắt Dx tại C.
- Dựng Cz//DD', Cz cắt BD'' tại A.

Tứ giác ABCD là hình thang cần dựng

c. *Chứng minh*: Theo cách dựng ta có:

- CD//AB nên ABCD là hình thang; BD = b, góc ABC = α
- AC = DD' = a (do ACDD' là hình bình hành) và

$$MN = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}(AB + AD') = \frac{1}{2}BD' = c$$

d. Biện luận: Bài toán có nghiệm hình

$$\Leftrightarrow \Delta BDD' \text{ dựng được} \Leftrightarrow |a - b| < 2c < a + b.$$

Bài tập 31.

a. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng d, khi đó ta dựng:

$A' = Q_O(A)$ và $B' = Q_O(B)$.

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng d'.

b. Với góc quay α ($-180^0 \le \alpha \le 180^0$) thì ta có ngay kết luận:

- $g(d, d') = |\alpha|$ nếu $|\alpha| \le 90^0$.
- $g(d, d') = 180^0 - |\alpha|$ nếu $|\alpha| > 90^0$.

Bài tập 32. Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0, ta có ngay:

$$\Delta OBB'' = Q_O^{90^0}(\Delta OAA') \Rightarrow G' = Q_O^{90^0}(G) \Rightarrow \widehat{GOG'} = 90^0 \text{ và } OG' = OG.$$

Vậy, ta được ΔGOG' là tam giác vuông cân.

Bài tập 33. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên d và giả sử $A' = \text{Đ}_O(A)$, $B' = \text{Đ}_O(B)$.

a. Nếu d không đi qua O thì:

AA'B'B là hình bình hành có tâm O

⇒ A'B' song song với AB, và O cách đều AB và A'B'

⇒ d' song song với d, và O cách đều d và d'

b. Nếu d đi qua O thì:

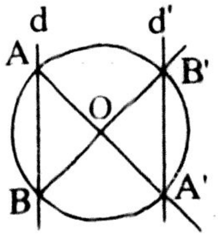
$A', B' \in d \Rightarrow d' \equiv d$.

Bài tập 34.

a. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng d, khi đó ta dựng:

$A' = \text{Đ}_O(A)$ và $B' = \text{Đ}_O(B)$.

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng d'.



b. Có thể thực hiện được, cụ thể:

- Lấy điểm A trên d, dùng thước thẳng dựng tia AO.
- Dùng compa dựng đường tròn (O; OA), đường tròn này cắt đường thẳng d tại B và tia AO tại A'.
- Dùng thước thẳng dựng tia BO cắt đường tròn tại B'.
- Dùng thước thẳng nối A' với B' ta được đường thẳng d' cần dựng.

Bài tập 35.

a. Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường thẳng đó.

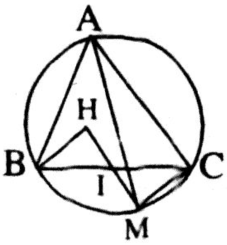
b. Tâm đối xứng là một điểm O bất kì nằm trên đường thẳng Δ song song và cách đều hai đường thẳng đó.

c. Tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường tròn.

d. Tâm đối xứng là giao điểm của hai trục đối xứng.

e. Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Bài tập 36. Gọi I là trung điểm BC và vẽ đường kính AM.



Ta có:

$BH \perp AC$ và $MC \perp AC \Rightarrow BH \,//\, MC$. (1)

$CH \perp AB$ và $MB \perp AB \Rightarrow CH \,//\, MB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

BHCM là hình bình hành ⇒ I là trung điểm HM.

Vậy, trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định $(O'; R) = \text{Đ}_I((O; R))$.

Bài tập 37. Ta thực hiện như sau:

- Dựng $\Delta' = \text{Đ}_I(\Delta)$ và giả sử Δ' cắt (O; R) tại A.
- Nối IA cắt Δ tại B.

Khi đó I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài toán chỉ có nghiệm khi đường thẳng Δ' cắt đường tròn (O; R).

Bài tập 38. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Với mỗi điểm $M(x_0; y_0) \in (\Delta)$ (tức là $Ax_0 + By_0 + C = 0$), suy ra tồn tại điểm $M'(x; y) \in (\Delta')$ sao cho:

$$\begin{cases} x = 2a - x_0 \\ y = 2b - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2a - x \\ y_0 = 2b - y \end{cases}.$$

Do đó, đường thẳng (Δ') sẽ có phương trình:

$$(\Delta'): A(2a - x) + B(2b - y) + C = 0 \Leftrightarrow (\Delta'): Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0.$$

Bài tập 39. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 40. *Đề nghị bạn đọc tự vẽ hình.*

Lấy M', Q' lần lượt đối xứng với M, Q qua I.

Ta có Q'M' đối xứng với MQ qua I.

Do A, B đối xứng nhau qua I nên Q'M' cắt BI tại F' đối xứng với E qua I.

Suy ra: IF' = IE .

Mặt khác A, B đối xứng nhau qua I nên A, B, M', Q' theo thứ tự đối xứng với B, A, M,Q qua I.

Mà B, A, M, Q ở trên đường tròn (O) nên A, B, M', Q' ở trên đường tròn (O') đối xứng với (O) qua I.

Lại có:

$$\overline{IM}\,.\,\overline{IN} = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ},$$

$$\overline{IM'} = -\,\overline{IM},$$

$$\overline{IQ'} = -\,\overline{IQ},$$

$\Rightarrow \overline{IM'}\,. = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ'}$ $\Rightarrow$ 4 điểm M', N, Q', P thuộc một đường tròn (K)

Vì:

- AB là trục đẳng phương của (O) và (O'),
- PN là trục đẳng phương của (O) và (K),
- Q'M' cắt AB tại F' nên PN đi qua F'.

Lại có PN cắt AB tại F nên F ≡ F' ⇒ IF = IE, đpcm.

Bài tập 41.

a. Giả sử AB = A'B'. Dựng các tam giác đều ABC và A'B'C', suy ra:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ ⇒ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

⇒ A'B' = f(AB) ⇒ hai hình AB và A'B' bằng nhau.

b. Giả sử hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ có cùng số đo.

- Lấy A, A' theo thứ tự thuộc tia Ox, O'x' sao cho OA = O'A'.
- Lấy B, B' theo thứ tự thuộc tia Oy, O'y' sao cho OB = O'B'.

Suy ra:

$\Delta OAB = \Delta O'A'B'$ ⇒ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta O'A'B' = f(\Delta OAB)$

⇒ $\Delta O'x'y' = f(\Delta Oxy)$ ⇒ hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ bằng nhau.

c. Với hai đường tròn (O; R) và (O'; R), gọi I là trung điểm OO'. Suy ra:

$(O'; R) = Đ_I(O; R)$ ⇒ hai đường tròn (O; R) và (O'; R) bằng nhau.

Bài tập 42. Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B' và BC = B'C'.

Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D'.

Ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ ⇒ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

⇒ A'O' = f(AO) ⇒ D' = f(D)

Vậy, ta được:

A'B'C'D' = f(ABCD) ⇒ hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

Bài tập 43.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Bởi hình thoi ABCD cạnh a không thể bằng hình vuông A'B'C'D' cạnh a.

b. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'

Ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c) $\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

$A'B'C'D' = f(ABCD) \Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

c. **Đáp số trắc nghiệm** A.

Bài tập 44. Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai n–giác đều **(H)**, **(H')**, và A, A' là hai đỉnh của hai n–giác đều đó. Nhận xét rằng:

$$Q_{O'}^{(OA,O'A')}(T_{\overrightarrow{OO'}}(\mathbf{H})) = (\mathbf{H'}) \Rightarrow (\mathbf{H}) = (\mathbf{H'}).$$

Bài tập 45. Xét hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$, ta có:

$O_1O_2 = r_1 + r_2 = I_1I_2,$

$O_2O_3 = r_2 + r_3 = I_2I_3,$

$O_3O_1 = r_3 + r_1 = I_3I_1,$

suy ra:

$\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta O_1O_2O_3 = f(\Delta I_1I_2I_3) \Rightarrow (\mathbf{H}_1) = f(\mathbf{H}_2)$

Vậy, hai hình $\mathbf{H}_1$ và $\mathbf{H}_2$ bằng nhau.

Bài tập 46. Giả sử tồn tại vectơ $\vec{v}(a, b)$ để tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ thành đồ thị $y = g(x)$. Khi đó:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 4 = f(x + a) + b = [-\frac{1}{2}(x + a)^2 - (x + a) + \frac{3}{2}] + b$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - (a + 1)x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} + b$$

$\Leftrightarrow a = -1$ và $b = 2$.

Từ đó, suy ra $(P') = T_{\vec{v}(-1;2)}(P)$.

Vậy, ta có kết luận (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 47. Viết lại phương trình parabol (P') dưới dạng:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Như vậy, tồn tại phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$ để $(P') = T(P)$.

Vậy, hai parabol (P) và (P') bằng nhau.

Bài tập 48. Giả sử tồn tại vectơ $\vec{v}(a, b)$ để tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ thành đồ thị $y = g(x)$, khi đó:

$$g(x) = f(x + a) + b \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = [(x + a)^3 + 3(x + a) + 1] + b$$

$$= x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 + 1)x + a^3 + 3a + 1 + b.$$

suy ra $a = -1$ và $b = 2$.

Từ đó, suy ra:

$(C') = T_{\vec{v}(-1;2)}(C)$.

Vậy, ta có kết luận (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 49. Giả sử tồn tại vectơ $\vec{v}(a, b)$ để tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ thành đồ thị $y = g(x)$, khi đó :

$$f(x + a) + b = g(x) \Leftrightarrow \frac{(x+a)^2}{(x+a)-2} + b = \frac{x^2 + 17x + 70}{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Từ đó, suy ra $(C') = T_{\vec{v}(8;1)}(C)$.

Vậy, ta có kết luận (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 50. Đó chính là đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành.

Bài tập 51. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). A; d). B.

Bài tập 52. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). A.

Bài tập 53.

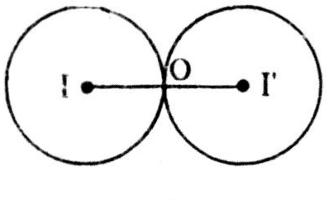
a. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc ngoài với nhau, ta xét:

Trường hợp 1: Nếu R = R' thì $k = \pm 1$.

Khi đó, tâm vị tự O thoả mãn:

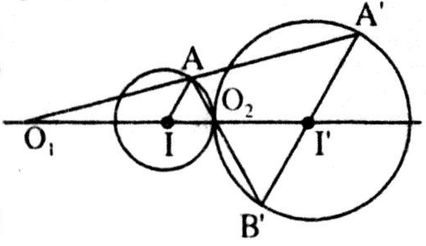
$\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ k chỉ có thể bằng -1

$\Rightarrow$ O (tâm vị tự trong) là trung điểm của II' (chính là tiếp điểm của hai đường tròn)



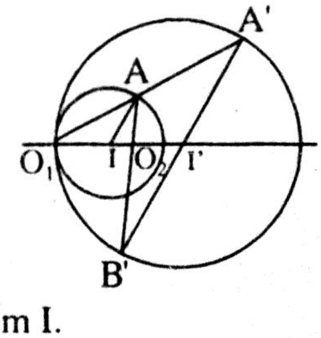
Trường hợp 2: Nếu $R \neq R'$ thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong và O_2 trùng với tiếp điểm).



b. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc trong với nhau ($R \neq R'$), ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

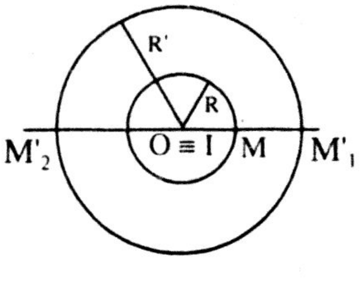


c. Đường tròn (I; R) nằm trong đường tròn (I'; R'), ta xét:

Trường hợp 1: Nếu $I \equiv I'$ thì khi đó tâm vị tự O trùng với điểm I.

Vậy, ta có hai phép vị tự:

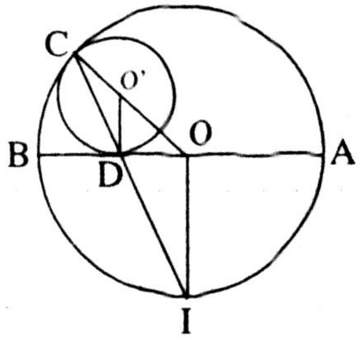
- Phép vị tự $V_1(I; k_1)$ với $k_1 = \frac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_1).
- Phép vị tự $V_2(I; k_2)$ với $k_2 = -\frac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_2).



Trường hợp 2: Nếu I không trùng với I' thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

Bạn đọc tự vẽ hình.



Bài tập 54. Ta có:

- C là tâm vị tự dương của hai đường tròn (O) và (O').
- D ∈ (O'), I ∈ (O) và ba điểm C, D, I thẳng hàng.

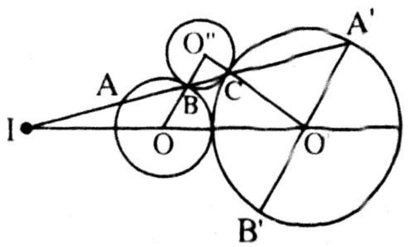
Do đó thực hiện phép vị tự tâm C, tỉ số $\frac{R'}{R}$ (R' là bán kính của (O')), ta có:

$$O' = V_C^{\frac{R'}{R}} O,\ D = V(I) \Rightarrow OI \,//\, O'D \Rightarrow OI \perp AB$$

⇒ I là trung điểm của cung AB ⇒ hai cung AI và BI bằng nhau.

Bài tập 55. Giả sử đường thẳng BC cắt (O), (O') và OO' theo thứ tự tại A, A' và I.

Vì C tâm tỉ cự trong của (O') và (O'') nên:



$$\frac{CA'}{CB} = \frac{R'}{R''} = \frac{CO'}{CO''} \Rightarrow O'A' \,//\, BO''$$

$$\Leftrightarrow O'A' \,//\, OB \Rightarrow \frac{IB}{IA'} = \frac{OB}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$

⇒ I là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Vậy, đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

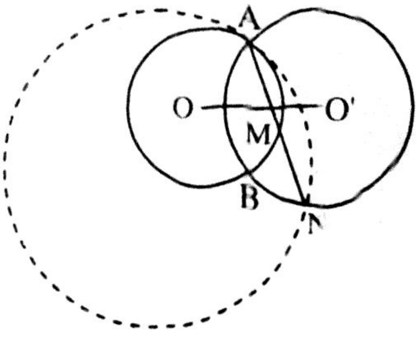
Bài tập 56. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 57. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 58. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 59.

a. *Phân tích*: Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN, gọi $k = \frac{AN}{AM} = 2$. Thực hiện phép vị tự V tâm A, tỉ số $k = 2$ thì N = V(M).



b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng (O'') = V(O), khi đó (O'') ∩ (O') = {N}.
- Nối AN cắt (O) tại M.

AN là đường thẳng d phải dựng

c. *Chứng minh*: Ta có ngay M, N theo thứ tự thuộc đường tròn (O) và (O'), ngoài ra:

$$N = V(M) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$$

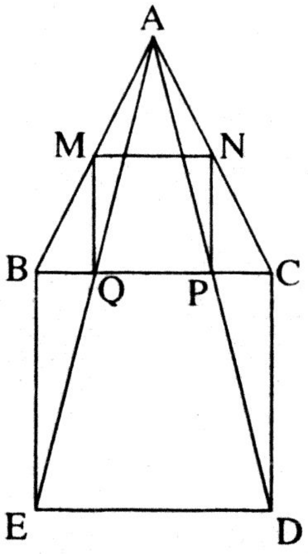
⇒ M là trung điểm của AN.

d. *Biện luận*: Vì (O'') cắt (O') tại duy nhất một điểm N nên bài toán chỉ có một nghiệm hình.

Bài tập 60.

a. *Phân tích*: Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC cho trước. Gọi k = $\frac{MN}{BC}$. Thực hiện phép vị tự tâm A, tỉ số k thì hình vuông MNPQ sẽ biến thành hình vuông BCDE. Suy ra A, P, D thẳng hàng và A, Q, E thẳng hàng.

b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:



- Dựng hình vuông BCDE sao cho BCDE và ABC nằm ở hai bên của đường thẳng BC.
- AD cắt cạnh BC tại P.
- AE cắt cạnh BC tại Q.
- Dựng đường thẳng qua P, song song với BC cắt cạnh AC tại N.
- Dựng đường thẳng qua N, song song với BC cắt cạnh AB tại M.

MNPQ là hình vuông phải dựng.

c. *Chứng minh*: Ta có:

- Theo cách dựng ta có tứ giác MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC.
- Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AE}} = k$$

do đó H_A^k : MNPQ$\mapsto$ BCDE mà BCDE là hình vuông nên MNPQ là hình vuông

d. *Biện luận*: Ta luôn chỉ có một hình vuông BCDE ở khác phía của tam giác ABC đối với đường thẳng BC nên luôn có chỉ một điểm P và chỉ một điểm Q ở trên cạnh BC.

Vậy bài toán có một và chỉ một nghiệm hình.

Bài tập 61. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 62. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 63. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 64. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 65. *Bạn đọc tự giải.*

Bạn đọc tự giải đề kiểm tra cuối chương

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Môn *hình học không gian* là môn học nghiên cứu các tính chất của các hình nằm trong không gian.

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là *điểm*, *đường thẳng* và *mặt phẳng*.

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:
   - Điểm A *thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \in d$.
   - Điểm A *không thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:
   - Điểm A *thuộc* mặt phẳng (P), kí hiệu $a \in (P)$.
   - Điểm A *không thuộc* mặt phẳng (P), kí hiệu $a \notin (P)$.

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Tính chất thừa nhận 1: *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*

Tính chất thừa nhận 2: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tính chất thừa nhận 3: *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Tính chất thừa nhận 4: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Tính chất thừa nhận 5: *Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.*

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

3. ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

Có bốn cách xác định một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau a, b, kí hiệu (a, b).

Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng song song a, b, kí hiệu (a, b).

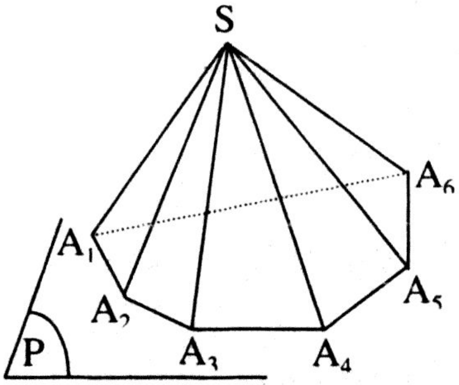
4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ *được gọi là* ***hình chóp*** $S.A_1A_2...A_n$.

Trong đó:

- Điểm S gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là *mặt đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp.



Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Chú ý:

1. Hình chóp tam giác còn gọi là *hình tứ diện*.
2. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều được gọi là *hình tứ diện đều*.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng các tính chất thừa nhận để xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

Phương pháp chung

1. Để biết khi nào một điểm thuộc một mặt phẳng, ta có các kết quả sau:
   - Giả sử (P) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C thì khi đó A, B, C đều thuộc (P).
   - Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P), thì khi đó điểm M thuộc a đều thuộc (P).
2. Để chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) ta đi chứng minh tồn tại hai điểm phân biệt A, B thuộc a và thuộc (P).
   - Nếu mặt phẳng (P) cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Đường thẳng* a *nằm trong một mặt phẳng cố định* (P)".
   - Nếu hai điểm A, B cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Mặt phẳng* (P) *chứa một đường thẳng cố định* a".

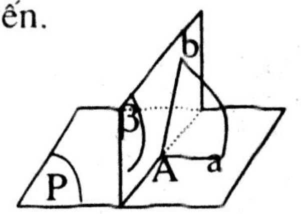
Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Phương pháp chung

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

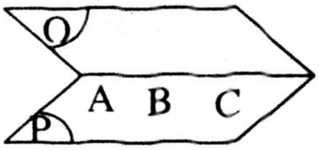
Bước 2: Đường thẳng qua 2 điểm chung đó là giao tuyến.



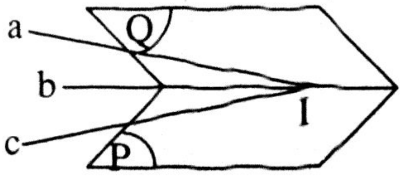
Chú ý: Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó. Giao điểm, nếu có, của hai đường thẳng này chính là điểm chung của hai mặt phẳng.

Bài toán 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.
Chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Phương pháp chung



1. Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.
2. Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.



Bài toán 4: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Phương pháp chung

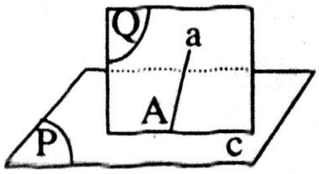
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P), giả sử a cắt (P). Để tìm giao điểm A của a và (P), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu trong mặt phẳng (P) có sẵn một đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A chính là giao điểm của a và (P).

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ (Q) chứa a sao cho giao tuyến c của (P) và (Q) dễ xác định.

Bước 2: Trong (Q), đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A là giao điểm của a và (P).



Bài toán 5: Thiết diện của hình chóp.

Phương pháp chung

Để tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).

Bước 2: Cho giao tuyến vừa tìm được cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó xác định được giao tuyến với các mặt này.

Bước 3: Tiếp tục như trên tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

Bài toán 6: Bài toán dựng hình.

Phương pháp chung

Thực hiện theo bốn bước như đã biết.

Bài toán 7: (*Bài toán quỹ tích*): Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động.

Phương pháp chung

Gọi M là giao điểm hai đường thẳng di động d_1, d_2. Để tìm tập hợp các điểm M ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Phần thuận*: Tìm hai mặt phẳng cố định lần lượt chứa d_1 và d_2. M di động trên giao tuyến cố định d của hai mặt phẳng đó.

Bước 2: *Giới hạn* (nếu có) được tập $\overline{d}$.

Bước 3: *Phần đảo*: Gọi M là điểm bất kỳ trên $\overline{d}$, ta đi chứng minh M là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bước 4: *Kết luận*.

Chú ý: Nếu d di động nhưng luôn đi qua điểm cố định A và cắt đường thẳng cố định a không qua A thì d thuộc mặt phẳng cố định (A, a).

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 1. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 2. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 3. Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì chúng đồng quy hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng (P), cho góc $\widehat{xOy}$, A là điểm ngoài (P). M, N là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy.

1. Giả sử OM = ON. Chứng minh rằng trung tuyến AP của ΔAMN luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

2. Gọi d là đường thẳng cố định qua A và cắt (P) tại một điểm không thuộc Ox, Oy. MN di động nhưng luôn cắt d.
   a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
   b. Gọi B là điểm cố định trên d, B ≠ A và không thuộc α. AM và BN cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng Q thuộc đồng thời hai mặt phẳng cố định. Suy ra Q thuộc một đường thẳng cố định.

Bài tập 5. Trong mặt phẳng α, cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc α. M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD, P là điểm trên SC và SP > PC. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SAC) và (ABCD).

Bài tập 6. Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với SI > IA và SJ < JC. Một mặt phẳng β quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN và SO đồng quy; (O là giao điểm của AC và BD). Suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm M.
b. AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.
c. IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi α di động.

Bài tập 7. Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. M là điểm trên cạnh SC.

a. Tìm giao điểm của AM và (SBD).
b. Gọi N là một điểm trên cạnh BC, tìm giao điểm của SD và (AMN).

Bài tập 8. Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trọng tâm ΔACD

a. Tính độ dài IJ.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

b. M là điểm di động trên đoạn BC. Tìm tập hợp giao điểm N của AM và (ICD).
c. Xác định thiết diện của tứ diện với (IGM) khi M là trung điểm của BC.
d. Tính các tỉ số mà (IGM) chia các cạnh CD và AD.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

e. Thiết diện trong câu c) là hình gì ? Tính diện tích của nó.

A. $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{7a^2\sqrt{3}}{48}$.

Bài tập 9. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. O là điểm bên trong ΔBCD, M là điểm trên AB.

a. Hãy dựng đường thẳng qua M cắt AO và CD.
b. N là điểm trên BC và ON không song song với BD. Dựng đường thẳng qua N cắt AO và DM.

Bài tập 10. Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD có AB và CD không song song. S là một điểm không thuộc α, M là điểm di động trên cạnh SB. Mặt phẳng (ADM) cắt SC tại N. Tìm tập hợp giao điểm của AM và DN.

§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Cho 2 đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của 2 đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. *Hai đường thẳng song song*: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là:

$$a \,//\, b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (P) \text{ và } b \subset (P) \\ a \cap b = \phi \end{cases}.$$

b. *Hai đường thẳng cắt nhau*: chỉ có một điểm chung.

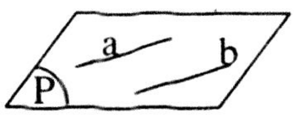
$$a \text{ cắt } b \Leftrightarrow a \cap b = \{I\}.$$

c. *Hai đường thẳng trùng nhau*: có hai điểm chung phân biệt.

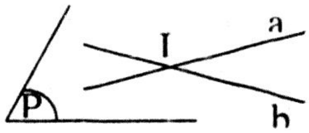
$$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b.$$

d. *Hai đường thẳng chéo nhau*: không cùng thuộc một mặt phẳng.

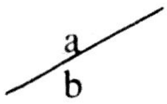
$$a \text{ chéo } b \Leftrightarrow a, b \text{ không đồng phẳng.}$$



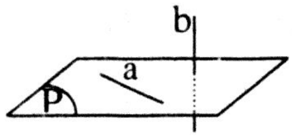
a//b



a cắt b



a≡b



a,b chéo nhau

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

***Định lí** (Về giao tuyến của ba mặt phẳng)*: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp chung

Để chứng minh hai đường thẳng a, b chéo nhau, ta thường sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử a, b không chéo nhau, tức là có một mặt phẳng α chứa cả a và b.

Bước 2: Suy ra một kết luận vô lý (trái với giả thiết hoặc trái với các tiên đề, các định lí).

Bước 3: Kết luận rằng hai đường thẳng a, b chéo nhau.

Bài toán 2: Chứng minh hai đường thẳng song song.

Phương pháp chung

Để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình của tam giác, định lí Talét đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba, ...).

Cách 2: Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ 3.

Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến.

Bài toán 3: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.
Thiết diện chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

Phương pháp chung

1. Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng ngoài phương pháp "*Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng*", ta sử dụng định lí về giao tuyến, như sau:

   Bước 1: Chỉ ra rằng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.

   Bước 2: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

   Bước 3: Khi đó $\alpha \cap \beta = Mx \,//\, a \,//\, b$.

2. Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 11. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 12. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và một đường thẳng b cắt (P) tại điểm O. Chứng minh rằng nếu điểm O không thuộc a thì a và b chéo nhau.

Bài tập 13. Trong mặt phẳng (P), cho hai nửa đường thẳng song song Ax, By. M và N là hai điểm lần lượt thuộc Ax và By; $M \neq A$ và $N \neq B$. O là điểm cố định không thuộc (P).

a. Chứng minh rằng OA và MN chéo nhau.

b. M, N di động, chứng tỏ rằng đường thẳng OI nối O với trung điểm I của MN nằm trong mặt phẳng cố định.

c. M, N di động nhưng AM + BN có giá trị không đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Bài tập 14. Cho hình chóp SABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAD. Chứng minh rằng IJ và BD song song với nhau.

Bài tập 15. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh MPNQ là hình bình hành. Từ đó, suy ra 3 đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài tập 16. Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB và CD (AB > CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a. Chứng minh rằng MN và CD song song với nhau.

b. Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ADN).

c. Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh rằng SI, AB và CD đôi một song song với nhau. Tứ giác SABI là hình gì ?

Bài tập 17. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, các cạnh đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔSAD, ΔSBC.

a. Tìm giao tuyến của (SAD) với (SBC).

b. Tìm giao tuyến của (BCI) với (SAD).

c. Tìm giao tuyến của (ADJ) với (SBC).

d. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. $\frac{3}{4}(a+b)$. **B.** $\frac{2}{5}(a+b)$. **C.** $\frac{5}{2}(a+b)$. **D.** $\frac{4}{3}(a+b)$.

Bài tập 18. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB, CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm ΔSAB.

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì ?

c. Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

A. AB = 2CD. **B.** AB = 3CD. **C.** 3AB = CD. **D.** 2AB = CD.

Bài tập 19. Cho tứ diện ABCD, các cạnh bằng nhau và bằng 6a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với KB = 2KD.

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a.

A. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\frac{3a^2\sqrt{51}}{4}$. **D.** $\frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

Bài tập 20. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $\widehat{SAD} = 90^0$. Gọi Dx là đường thẳng qua D song song với SC.

a. Tìm giao điểm I của Dx với mặt phẳng (SAB). Chứng minh AI và SB song song với nhau.

b. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI).

c. Tính diện tích của thiết diện.

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

§ 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

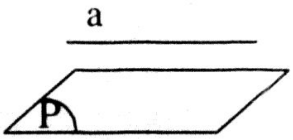
$$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, (P).$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

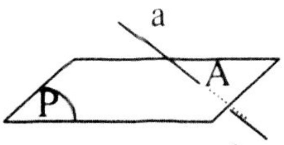
$$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a \text{ cắt } (P) \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có 2 điểm chung phân biệt, tức là:

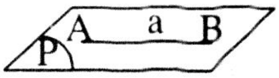
$$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$$



$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a // (P)$



$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a$ cắt (P)



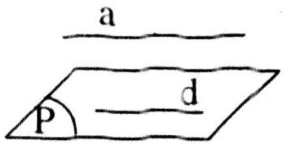
$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P)$

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

Định lí 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P).

Tức là, với $a \not\subset (P)$ thì nếu:

$$a \,//\, d \subset (P) \Rightarrow a \,//\, (P).$$

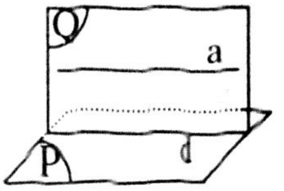


3. TÍNH CHẤT

Định lí 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a.

Tức là, nếu:

$$\begin{cases} a \,//(P) \\ a \subset (Q) \cap (P) = d \end{cases} \Rightarrow a \,//\, d.$$

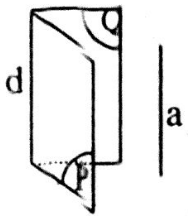


Hệ quả 1: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.

Tức là:

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) \,//\, a \\ (Q) \,//\, a \end{cases} \Rightarrow d \,//\, a.$$



Hệ quả 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

Phương pháp chung

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng α ta chứng minh d không nằm trong α và song song với một đường thẳng a chứa trong α.

Chú ý: Nếu a không có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng β chứa d và nhận a làm giao tuyến của α và β.

Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.
Thiết diện song song với một đường thẳng cho trước.

Phương pháp chung

1. Tìm phương giao tuyến bằng định lí 2 hoặc định lí 3.
2. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước theo phương pháp đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 21. Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. a và b song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. a và b chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. a và b có thể cắt nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. a và b trùng nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 22. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

f. Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 23. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm ΔABD và ΔACD. Chứng minh G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).

Bài tập 24. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a. Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b. M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABD và ABF. Chứng minh MN song song với (CDEF).

Bài tập 25. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng:

a. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với (BCD) là:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}.$$

b. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với 2 mặt phẳng (BCD) và (ACD) là BC = BD và AC = AD.

Bài tập 26. Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm bất kì trên SB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

a. Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SAC).

b. Xác định thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng (P).

Bài tập 27. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang có đáy lớn BC = 2a, AD = a, AB = b. Mặt bên SAD là tam giác đều. α là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AB và song song với SA và BC, α cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AM, (0 < x < b).

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{b^2}.(b + 3x)(b - x).$ **C.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{3b^2}.(b + 3x)(b - x).$

B. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2b^2}.(b + 3x)(b - x).$ **D.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.(b + 3x)(b - x).$

c. Tính giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện.

A. $\frac{4a^2}{\sqrt{3}}.$ **B.** $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}.$ **C.** $\frac{4a^2}{3\sqrt{3}}.$ **D.** $\frac{a^2}{\sqrt{3}}.$

Bài tập 28. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. M và P là 2 điểm di động trên các cạnh AD và BC, sao cho AM = CP = x, (0 < x < a). Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

a. Chứng minh thiết diện thông thường là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện.

A. $\frac{a}{4}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}.$ **C.** $\frac{a}{4}\sqrt{3x^2 - ax + 3a^2}.$

B. $\frac{a}{4}\sqrt{8x^2 - 4ax + 3a^2}.$ **D.** $\frac{a}{4}\sqrt{4x^2 - ax + 3a^2}.$

c. Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

A. $x = \frac{a}{2}$. **B.** $x = \frac{a}{4}$. **C.** $x = \frac{a}{6}$. **D.** $x = \frac{a}{8}$.

Bài tập 29. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c (a > b > c). Một mặt phẳng α song song với AB và CD, cắt tứ diện theo một thiết diện có chu vi p và diện tích s.

a. Định α để p lớn nhất, nhỏ nhất.

b. Định α để s lớn nhất. Tính diện tích ấy.

A. $\frac{a}{4}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

B. $\frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}$.

C. $\frac{1}{4a}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$.

D. $\frac{1}{4ab}\sqrt{ab(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Bài tập 30. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho AJ = 2JD. M là một điểm di động trong tam giác BCD sao cho mặt phẳng (MIJ) luôn song song với AB.

a. Tìm tập hợp điểm M.

b. Tính diện tích thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng (MIJ).

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{5a^2\sqrt{3}}{7}$.

§ 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q). Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

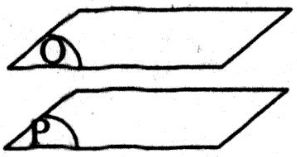
$$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P) \,//\, (Q).$$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

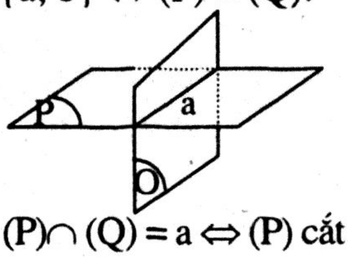
$$(P) \cap (Q) = a \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (Q).$$

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

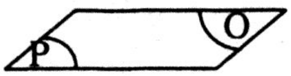
$$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q).$$



$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P)//(Q)$



$(P) \cap (Q) = a \Leftrightarrow$ (P) cắt (Q)

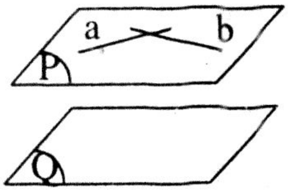


$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q)$

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

Tức là:



$$\begin{cases} a, b \in (P) \\ a \text{ cắt } b \\ a // (Q) \text{ và } b // (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q).$$

3. TÍNH CHẤT

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Tức là:

$$O \notin (P) \Rightarrow \exists!(Q): \begin{cases} O \in (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases}.$$

Cách dựng:

- Trong (P) dựng a, b cắt nhau.
- Qua O dựng $a_1 // a$, $b_1 // b$.
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với (P).

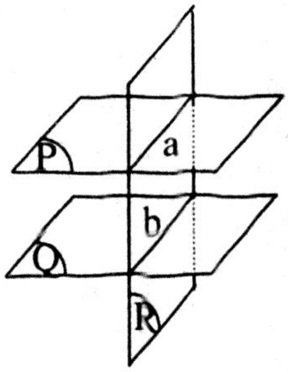
Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

Tức là:

$$\begin{cases} (P) // (Q) \\ a = (P) \cap (R) \\ b = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

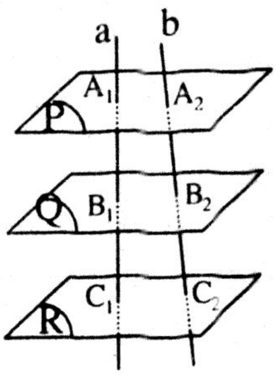


Định lí Ta – lét trong không gian: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

Tức là:

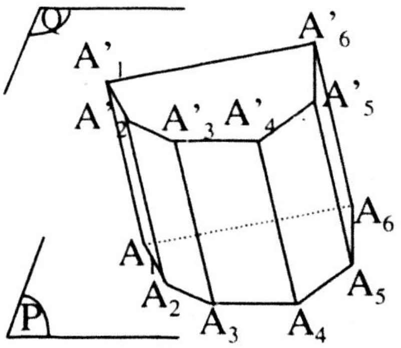
$$\begin{cases} (P) // (Q) // (R) \\ a \cap (P) = A_1 \text{ và } a \cap (Q) = B_1 \text{ và } a \cap (R) = C_1 \\ b \cap (P) = A_2 \text{ và } b \cap (Q) = B_2 \text{ và } b \cap (R) = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$



4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa hình lăng trụ: *Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.*



Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Tuỳ theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

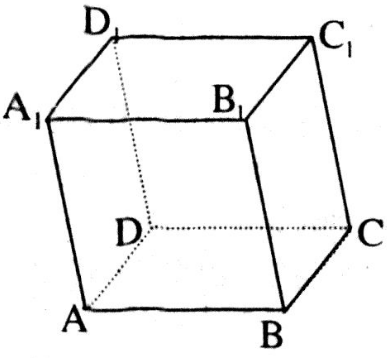
b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

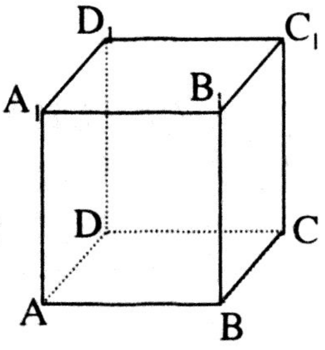
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

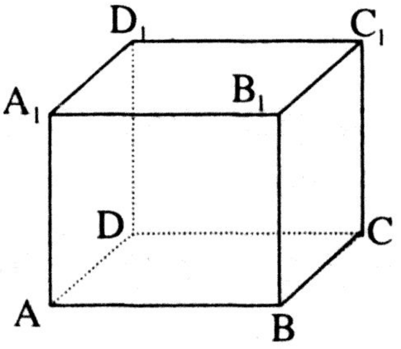
Định nghĩa hình hộp: *Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.*

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.



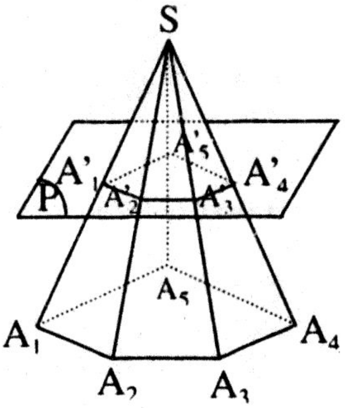




Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

5. HÌNH CHÓP CỤT

Định nghĩa: Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n theo thứ tự tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là một *hình chóp cụt*.



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...$A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Cách cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song.

Phương pháp chung

Để chứng minh 2 mặt phẳng song song ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng kia (hoặc song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia).

Chú ý:

1. Sử dụng tính chất:

$$\begin{cases}(P)//(Q)\\ a\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow a//(P)$$

ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng a song song với (P).

2. Sử dụng định lí Talét đảo ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, cụ thể:

   Ba điểm A_1, B_1, C_1 thuộc đường thẳng a và ba điểm A_2, B_2, C_2 thuộc đường thẳng b (với a và b chéo nhau) thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

   suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song lần lượt chứa các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, từ đó ta được các kết quả:

   A_1A_2 song song với (Q) và (R).
   B_1B_2 song song với (P) và (R).
   C_1C_2 song song với (P) và (Q).

   Điều quan trọng nhất cần chỉ ra được sự tồn tại của một trong ba mặt phẳng.

Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.
Thiết diện song song với một mặt phẳng cho trước.

Phương pháp chung

1. Ta sử dụng thêm tính chất 2 để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.
2. Thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước được xác định thông qua việc tìm được các đoạn giao tuyến như trên.

Bài toán 3: Sử dụng tính chất của hình lăng trụ – Thiết diện.

Phương pháp chung

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình chóp. Lưu ý rằng "*Hai đáy hình lăng trụ song song, do đó giao tuyến của mặt phẳng cắt 2 mặt đó, nếu có, là hai đoạn thẳng song song*".

Bài toán 4: Sử dụng tính chất của hình hộp – Thiết diện.

Phương pháp chung

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình hộp để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình lăng trụ.

Bài toán 5: Các bài toán về chóp cụt.

Phương pháp chung

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình hộp để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình lăng trụ.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 31. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên một mặt phẳng đều song song với mặt phẳng còn lại.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

f. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 32. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Hình hộp là một hình lăng trụ.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hình lăng trụ có tất cả các cạnh bên bằng nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.

A. Đúng. B. Sai.

e. Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau.

A. Đúng. B. Sai.

Bài tập 33. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.

b. Gọi I là trung điểm SC, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB và CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

c. Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với (SAD).

Bài tập 34. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a. Chứng minh rằng IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước (tức điểm M thoả $\overrightarrow{IM} = k.\overrightarrow{MJ}$).

Bài tập 35. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB = 3a, AD = CD = a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với SA = 2a, α là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Đặt x = AM, với $0 < x < a$. Định x để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c. Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD.

d. Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.

Bài tập 36. Cho lăng trụ tam giác ABC. $A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên ABB_1A_1, ACC_1A_1 là hình vuông. Gọi I, J là tâm các mặt bên nói trên và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a. Chứng minh IJ song song với mặt phẳng (ABC).

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (IJO). Chứng minh thiết diện là hình thang cân. Tính diện tích của nó theo a.

Bài tập 37. Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$.

a. Chứng minh rằng $(BDA_1) // (B_1D_1C)$.

b. Chứng minh đường chéo AC_1 đi qua các trọng tâm G, G_1 của ΔA_1BD và ΔCB_1D_1 và G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A_1B_1G_1)$ với hình hộp đã cho. Thiết diện là hình gì ?

d. Gọi O, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và BCC_1B_1. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (A_1OK) với hình hộp đã cho.

Bài tập 38. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B_1C_1 và DD_1.

a. Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của nó.

Bài tập 39. Cho hình chóp cụt $ABC.A_1B_1C_1$ trong đó ABC là đáy lớn. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, BC, CA và M_1, N_1, P_1 theo thứ tự là trung điểm A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

a. Chứng minh rằng các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy.

b. Chứng minh rằng $MN \parallel M_1N_1$, $NP \parallel N_1P_1$, $PM \parallel P_1M_1$.

Bài tập 40. Cho hình chóp cụt $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ trong đó ABCD là đáy lớn có diện tích bằng s_1 và $A_1B_1C_1D_1$ là đáy nhỏ có diện tích bằng s_2.

a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$

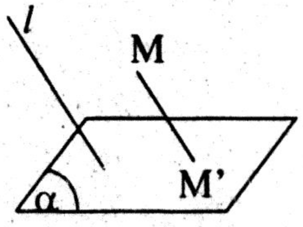
b. Gọi M là trung điểm AA_1, mặt phẳng α qua M và song song với mặt phẳng đáy (ABCD). Xác định thiết diện của hình chóp cụt với mặt phẳng α. Tính diện tích thiết diện theo s_1 và s_2.

§ 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng α và một đường thẳng *l* không song song với α.



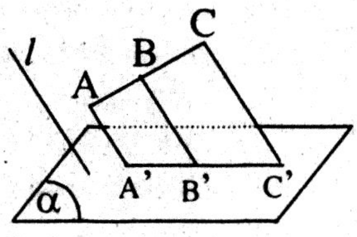
Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song với *l* sẽ cắt α tại điểm M'. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng α theo phương *l*.

Mặt phẳng α gọi là *mặt phẳng chiếu.*

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên α được gọi là *phép chiếu song song lên mặt phẳng α theo phương l.*

Chú ý: Nếu a // *l* thì hình chiếu của a lên α là một điểm trên α (chính là giao điểm của a với α), do vậy các tính chất trong phần sau chỉ xét những đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song với *l*.

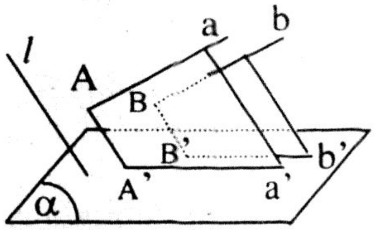
2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

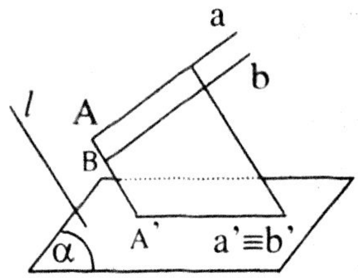


***Định lí 1**: Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*

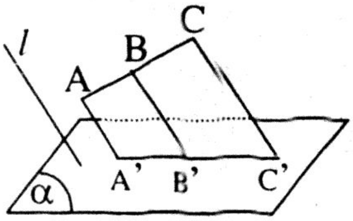
***Hệ quả**: Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng,, của tia là tia, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.*

Định lí 2: *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*





Hệ quả: *Hình chiếu song song của một hình bình hành không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu là một hình bình hành.*



Định lí 3: *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*

Tức là:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

Ta thường vẽ các hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, ... trên bảng hay trên trang giấy, các hình vẽ đó gọi là *hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.*

Định nghĩa: *Hình biểu diễn của một hình* H *trong không gian là hình chiếu song song của* H *lên một mặt phẳng nào đó* theo một phương chiếu nào đó.

Các yêu cầu đối với một hình biểu diễn:

1. *Hình biểu diễn phải đúng*: Để vẽ đúng chúng ta cần quan tâm tới các yếu tố được bảo toàn sau:
   a. Sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm trên một đường thẳng.
   b. Sự song song của các đường thẳng, các tia hoặc các đoạn thẳng.
   c. Tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng phương.

   Như vậy, *các tính chất của hình không thay đổi qua phép chiếu song song đều được giữ nguyên trên hình biểu diễn.*
2. *Hình biểu diễn phải nổi*: Giúp chúng ta dễ tưởng tượng.

   Chúng ta có:
   - ***Tam giác***: Một ΔABC có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác bất kì (đều, cân, vuông).
   - ***Hình bình hành***: Một hình bình hành ABCD có thể xem là hình biểu diễn của các loại hình bình hành như hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi và hình bình hành bất kì.
   - ***Đường tròn***: Để biểu diễn đường tròn chúng ta sử dụng một hình Elíp.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 41. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 42. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.

A. Đúng. **B.** Sai.

f. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 43. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh hình chiếu song song K của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm ΔBCD.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N, P trong phép chiếu song song ở câu a).

Bài tập 44. Cho ba điểm A, B, C nằm ngoài mặt phẳng α. Giả sử BC song song với α, còn AB và AC cắt α lần lượt tại D và E. Hãy chọn phương chiếu l sao cho hình chiếu của tam giác ABC trên α theo phương l là một tam giác đều.

Bài tập 45. Trong mặt phẳng α cho hình bình hành ABCD bất kì. Chứng minh rằng có thể xem:

a. ABCD là hình chiếu song song của một hình chữ nhật nào đó.

b. ABCD là hình chiếu song song của một hình thoi nào đó.

c. ABCD là hình chiếu song song của một hình vuông nào đó.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). A.

Bài tập 2. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). B.

Bài tập 3. Với ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Giả sử:

$$a \cap b = \{A\},\ b \cap c = \{B\},\ c \cap a = \{C\}.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt.

Do a, b, c phân biệt nên A, B, C là ba điểm không thẳng hàng. Vậy chúng xác định một mặt phẳng (ABC). Ta có:

- Đường thẳng a có hai điểm A, C thuộc (ABC), nên $a \in (ABC)$.
- Tương tự $b \in (ABC)$ và $c \in (ABC)$.

Vậy, ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng (ABC).

Trường hợp 2: Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau, giả sử $A \equiv B$.

Nếu $A \neq C$ thì $a \equiv c$, mâu thuẫn.

Do đó, ta phải có $A \equiv C \Leftrightarrow A \equiv B \equiv C \Leftrightarrow$ a, b, c đồng quy.

Vậy, ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

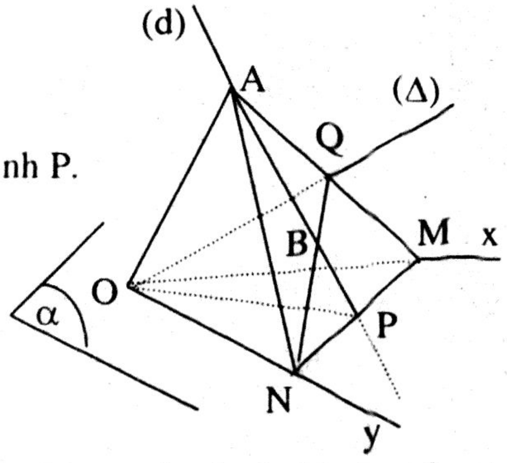
Bài tập 4.

1. Ta có:

$OM = ON \Rightarrow P$ thuộc Oz là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ – cố định.

Vậy, trung tuyến AP nằm trong mặt phẳng cố định (A, Oz).

2. Giả sử $d \cap \alpha = \{P\}$ – cố định.



a. Ta có ngay:

$d \cap MN = \{P\}$ cố định.

Vậy, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định P.

b. Ta có:

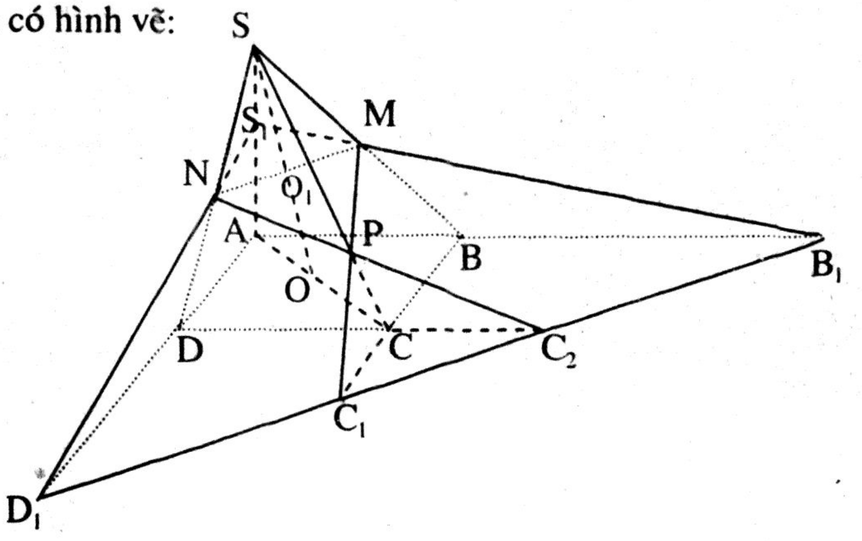
- $Q \in BN \subset (B, Oy)$ – cố định

  $\Rightarrow Q \in (B, Oy)$ – cố định.
- $Q \in AM \subset (A, Ox)$ – cố định

  $\Rightarrow Q \in (A, Ox)$ – cố định.

Vậy, điểm Q thuộc đường thẳng cố định Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A, Ox) và (B, Oy).

Bài tập 5. Ta có hình vẽ:



Từ giả thiết về các điểm M, N và P ta có:

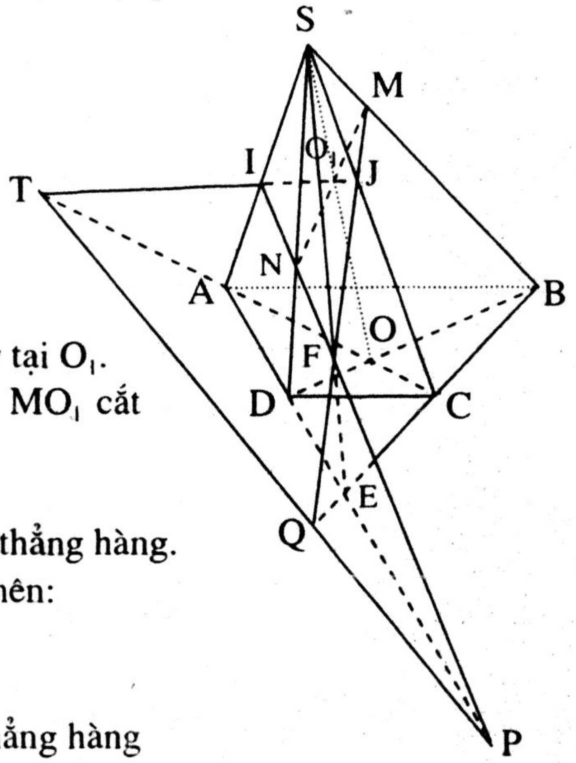
$MP \cap BC = C_1$ và $NP \cap CD = C_2$; $MN \cap SO = O_1$ và $PO_1 \cap SA = S_1$.

Từ đó, ta có kết luận:

$(MNP) \cap (SAB) = MS_1$; $(MNP) \cap (SAD) = NS_1$;

$(MNP) \cap (SAC) = PS_1$; $(MNP) \cap (ABCD) = C_1C_2$.

Bài tập 6.



a. Giả sử $IJ \cap SO = O_1$.

Ta có:

$O_1 \in IJ \subset \beta \Rightarrow O_1 \in \beta$,

$O_1 \in SO \subset (SBD) \Rightarrow O_1 \in (SBD)$.

Suy ra:

$O_1 \in \beta \cap (SBD) = MN$.

Vậy, ba đường thẳng IJ, MN, SO đồng quy tại O_1.

Như vậy, khi biết điểm M ta chỉ cần nối MO_1 cắt SD tại N.

b. Nhận xét rằng:

$(SAD) \cap (SBC) = \{S, E, F\} \Rightarrow$ S, E, F thẳng hàng.

c. Trước tiên, vì IJ không song song với AC nên:

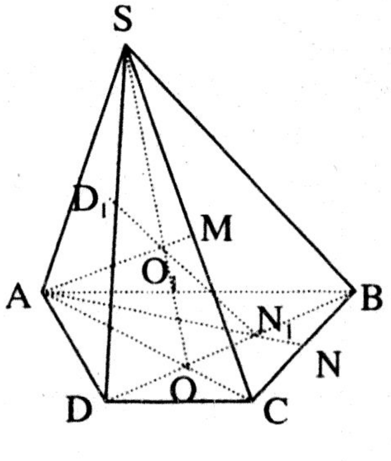
$IJ \cap AC = T$ – là một điểm cố định.

Nhận xét rằng:

$\beta \cap (ABCD) = \{T, P, Q\} \Rightarrow$ T, P, Q thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ PQ luôn đi qua điểm cố định T.

Bài tập 7.



a. Chọn mặt phẳng phụ (SAC) chứa AM.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra:

$(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$SO \cap AM = O_1 \Rightarrow AM \cap (SBD) = O_1$.

b. Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

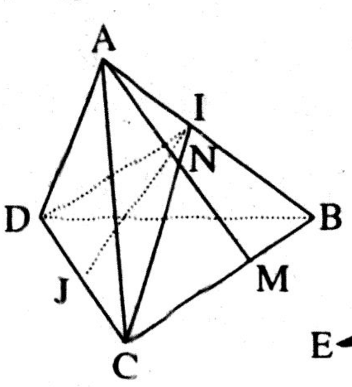
Gọi N_1 là giao điểm của AN và BD, suy ra:

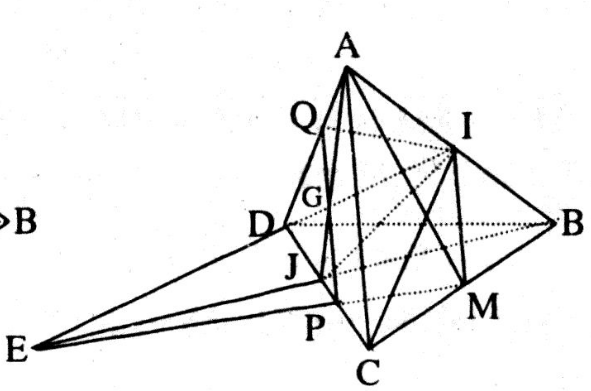
$(SBD) \cap (AMN) = N_1O_1$.

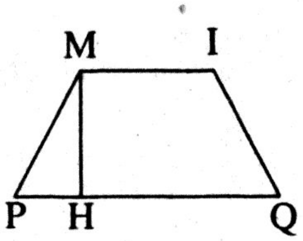
Trong mặt phẳng (SBD), ta có:

$N_1O_1 \cap SD = D_1 \Rightarrow SD \cap (AMN) = D_1$.

Bài tập 8. Ta có hình vẽ:







a. Đáp số trắc nghiệm B.

b. Ta có ngay:

$$\{N\} = AM \cap CI \subset (ICD).$$

Vậy, tập hợp giao điểm N của AM và (ICD) là đoạn CI.

c. Để xác định thiết diện, ta lần lượt thực hiện:

- Nối IG cắt BJ tại E.
- Nối EM cắt CD tại P.
- Nối PG cắt AD tại Q.

Khi đó, các đoạn thẳng MP, PQ, QI, IM là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (IGM) với tứ diện.

Vậy, thiết diện là tứ giác MPQI.

d. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Ta có nhận xét:

$$1 = \frac{EB}{EJ}.\frac{GJ}{GA}.\frac{IA}{IB} = \frac{EB}{EJ}.\frac{1}{2}.1 \Leftrightarrow EB = 2EJ \Leftrightarrow J \text{ là trung điểm } EB.$$

Trong ΔBCE có hai trung tuyến CJ và EM nên P là trọng tâm của tam giác, suy ra:

$$PC = 2PJ \Leftrightarrow 3PC = 2(PJ + PC) = 2CJ = 2DJ \Leftrightarrow 4PC = 2(DJ + PJ) = 2DP$$

$$\Leftrightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{1}{2}.$$

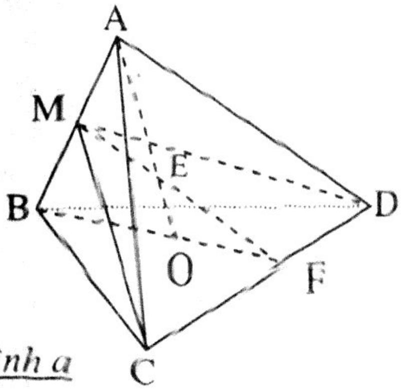
Mặt khác, ta nhận thấy:

$$\frac{1}{2} = \frac{PJ}{PC} = \frac{GJ}{GA} \Rightarrow PG \parallel AC \Rightarrow PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{QA}{QD} = \frac{PJ}{PC} = \frac{1}{2}.$$

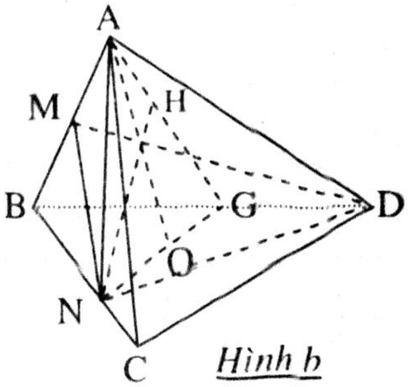
Vậy, mặt phẳng (IGM) chia các cạnh CD và AD theo tỉ số bằng $\frac{1}{2}$.

e. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 9.



Hình a



Hình b

a. Ta lần lượt thực hiện:

Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng d qua M cắt AO, CD theo thứ tự tại E và F (hình a), khi đó:

M, E thuộc d, nên d ∈ (M, AO).

M, F thuộc d, nên d ∈ (M, CD).

Suy ra d = (M, AO) ∩ (M, CD).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

Dựng mặt phẳng (M, CD).

- Dựng mặt phẳng (M, AO) bằng việc nối B với O cắt CD tại F, ta được mp cần dựng là (ABF).
- (MCD) $\cap$ (ABF) = MF.

Khi đó MF là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh: Ta thấy:

MF đi qua M và đi qua điểm F thuộc CD.

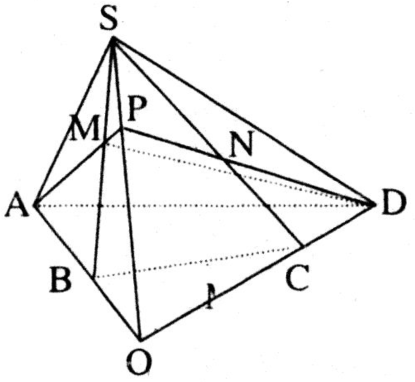
Trong mặt phẳng (ABF) thì MF cắt AO tại E.

Vậy, ta được MF đi qua M cắt cả AO và CD.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

b. *Bạn đọc tự làm* – Lập luận tương tự câu a) với hình b.

Bài tập 10.



Phần thuận: Ta có:

AM $\subset$ (SAB) – cố định.

Mặt khác, vì DN đi qua điểm cố định D và cắt đường thẳng cố định SC nên:

DN $\subset$ (SCD) – cố định.

Giả sử AB cắt CD tại O, ta có ngay:

(SAB) $\cap$ (SCD) = SO.

Vậy, tập hợp giao điểm P của AM và DN thuộc đường thẳng SO.

Giới hạn: Khi M di chuyển trên cạnh SB thì P di chuyển trên đoạn SO.

Phần đảo: Gọi P là điểm bất kỳ trên SO.

- Nối AP cắt SB tại M.
- Nối DP cắt SC tại N, N là giao điểm của mặt phẳng (ADM) với SC và P chính là giao điểm của AM và DN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SO.

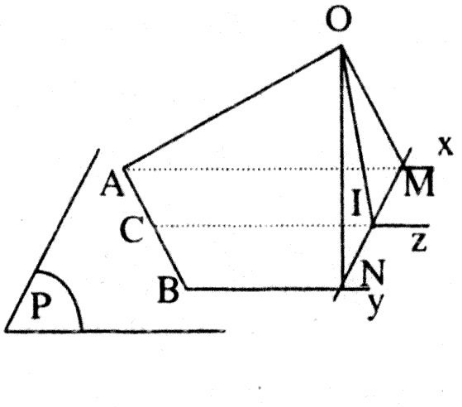
Bài tập 11. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). B; d). A.

Bài tập 12. Giả sử a và b không chéo nhau, suy ra;

a và b đồng phẳng $\Rightarrow$ b $\subset$ (O, a) = (P), điều này mâu thuẫn với giả thiết b cắt (P).

Vậy, nếu điểm O không thuộc a thì a và b chéo nhau.

Bài tập 13.



a. Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử OA và MN không chéo nhau tức chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này chứa ba điểm A, M, N không thẳng hàng, đó chính là mặt phẳng α, suy ra:

O $\in \alpha$, trái với giả thiết.

Vậy, OA và MN chéo nhau.

b. Gọi C là trung điểm AB, nhận xét rằng:

ABNM là hình thang

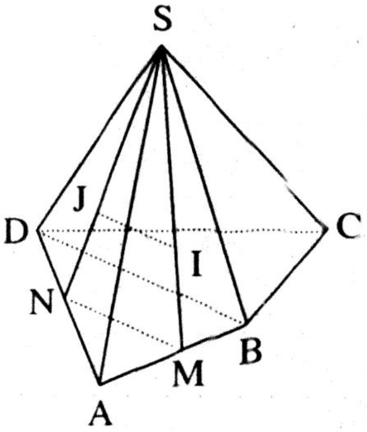
$\Rightarrow$ I $\in$ Cz là đường trung bình của ABNM – cố định

Vậy, OI nằm trong mặt phẳng cố định (O, Cz).

c. Xét hình thang ABNM, ta có:

$$CI = \frac{1}{2}(AM + BN) \text{ – không đổi} \Rightarrow I \text{ cố định.}$$

Vậy, mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng OI cố định.



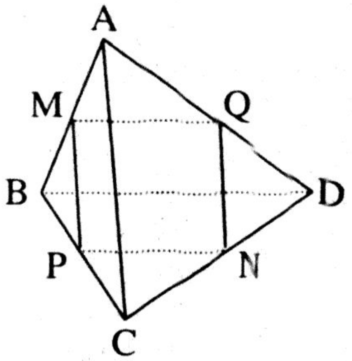
Bài tập 14. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AD, ta có:

$$\frac{SI}{SM} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN. \quad (1)$$

Mặt khác, trong ΔABD ta có MN là đường trung bình nên:

$$MN \parallel BD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IJ // BD.



Bài tập 15. Từ giả thiết ta có ngay:

$$MP \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC. \quad (1)$$

$$NQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$MP \overset{//}{=} NQ \Leftrightarrow \text{MPNQ là hình bình hành.}$$

Từ kết quả đó, suy ra MN và PQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Bằng cách lập luận tương tự như trên, chúng ta cũng có MRNS là hình bình hành, từ đó suy ra MN và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Vậy, ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài tập 16.

a. Trong ΔSAB, ta có:

MN // AB – tính chất đường trung bình. (1)

Mặt khác:

AB // CD – vì ABCD là hình thang đáy AB, CD. (2)

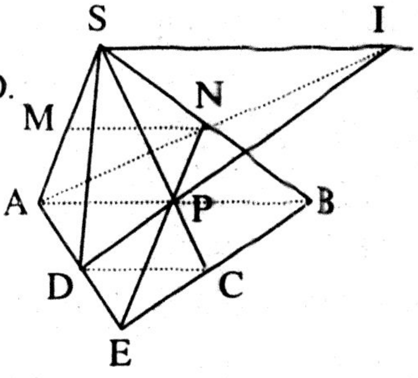
Từ (1) và (2) suy ra MN // CD.

b. Gọi $E = AD \cap BC$.

$P = SC \cap EN \subset (ADN) \Rightarrow P = SC \cap (ADN)$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } CD \in (SCD) \\ AB \parallel CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \parallel AB \parallel CD.$$



Nhận xét rằng:

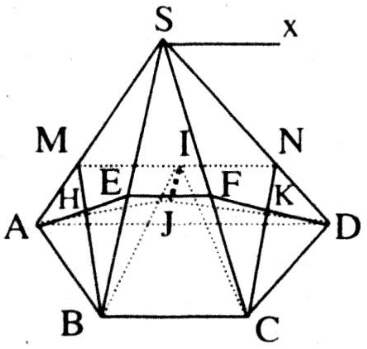
$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2}SI \text{ và } MN \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB$$

$$\Rightarrow SI \overset{//}{=} AB \Leftrightarrow \text{SABI là hình bình hành.}$$

Bài tập 17.

a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (SBC) = Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \,//\, AD \,//\, BC.$$



b. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (BCI) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (BCI) = Iy \end{cases} \Rightarrow Iy \,//\, AD \,//\, BC$$

và Iy cắt SA, SD theo thứ tự tại M, N.

c. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (ADJ) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (ADJ) \cap (SBC) = Jz \end{cases} \Rightarrow Jz \,//\, AD \,//\, BC$$

và Jz cắt SB, SC theo thứ tự tại E, F.

d. **Đáp số trắc nghiệm B.**

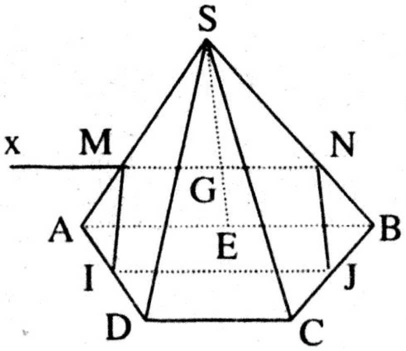
Hướng dẫn: Giả sử AE cắt BM tại H và CN cắt DF tại K, và ta cần tính độ dài HK.

Bạn đọc tự làm dựa trên định lí Ta − lét, đáp số $HK = \frac{2}{5}(a + b)$.

Bài tập 18.

a. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } IJ \in (IJG) \\ AB \,//\, IJ \\ (SAB) \cap (IJG) = Gx \end{cases} \Rightarrow Gx \,//\, AB \,//\, IJ.$$



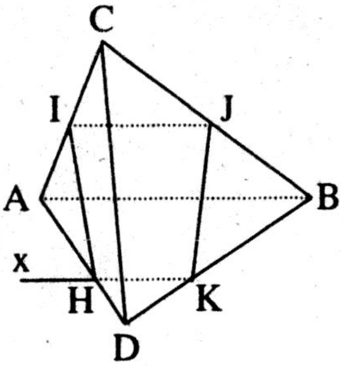
b. Giả sử Gx cắt SA, SB theo thứ tự tại M, N. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IM, MN và NJ. Do đó thiết diện là hình thang MNJI.

c. **Đáp số trắc nghiệm B.**

Bài tập 19.

a. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (ABD) \text{ và } IJ \in (IJK) \\ AB \,//\, IJ \\ (ABD) \cap (IJK) = Kx \end{cases} \Rightarrow Kx \,//\, AB \,//\, IJ.$$



Giả sử Kx cắt AD theo thứ tự tại H. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IH, HK và KJ. Do đó thiết diện là hình thang IJKH.

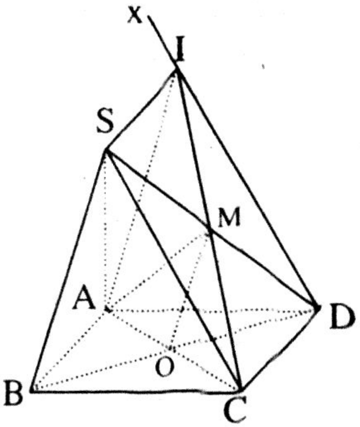
Mặt khác, ta thấy ngay $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow IH = JK$.

Vậy, thiết diện IJKH là hình thang cân.

b. **Đáp số trắc nghiệm D.**

Bài tập 20.

a. Ta có:



$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } CD \in (SCD) \\ AB // CD \\ (SAB) \cap (SCD) = St \end{cases} \Rightarrow St // AB // CD.$$

Trong mặt phẳng (SCD), ta có:

$\{I\} = Dx \cap St \Rightarrow \{I\} = Dx \cap (SAB)$.

b. Nối CI cắt SD tại M, ta thấy ngay M là trung điểm SD vì SCDI là hình bình hành.

Từ đó, ta thấy ΔACM là thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI).

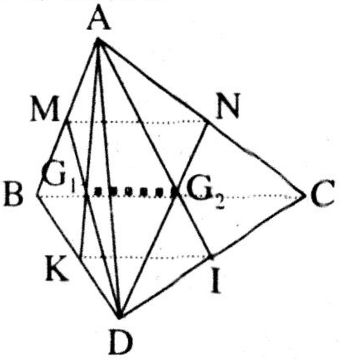
c. Đáp số trắc nghiệm B.

Bài tập 21. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B; c). A; d). B.

Bài tập 22. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). B; d). A; e). B; f). A.

Bài tập 23. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, BD.



Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_1}{DM} = \frac{2}{3}.$$

Trong ΔACD, ta có ngay:

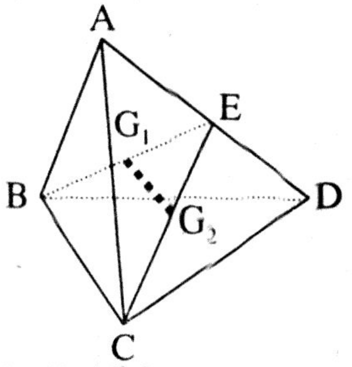
$$\frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // KI \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 // (BCD).$$

$$\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 // (ABC).$$

Cách 2: Gọi E là trung điểm của AD.



Trong ΔABD, ta có ngay $\frac{BG_1}{BE} = \frac{2}{3}$.

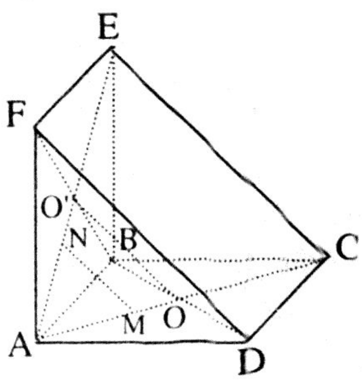
Trong ΔACD, ta có ngay $\frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3}$.

Từ đó, ta có $\frac{BG_1}{BE} = \frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // BC$

Vì BC thuộc (BCD) và (ABC) nên $G_1G_2 // (BCD)$ và $G_1G_2 // (ABC)$.

Bài tập 24.

a. Ta lần lượt có:



$$\frac{AO}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AO'}{AE} \Rightarrow OO' // CE \subset (BCE)$$

$\Rightarrow OO' // (BCE)$.

$$\frac{BO}{BD} = \frac{1}{2} = \frac{BO'}{BF} \Rightarrow OO' // DF \subset (ADF)$$

$\Rightarrow OO' // (ADF)$.

b. Ta có:

$$\frac{AM}{AO}=\frac{2}{3}=\frac{AN}{AO'}\Rightarrow MN \mathbin{/\!/} OO' \mathbin{/\!/} DF\subset(CDFE)\Rightarrow MN \mathbin{/\!/} (CDFE).$$

Bài tập 25.

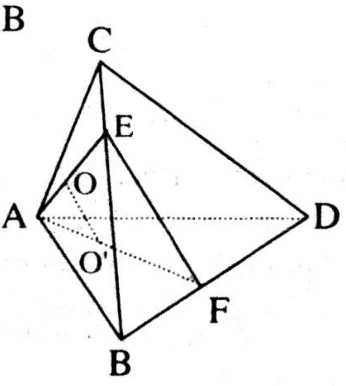
a. Ta lần lượt có:

$\{E\}=AO\cap BC\Rightarrow AE$ là đường phân giác của $\widehat{CAB}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CE}=\frac{AB+AC}{BE+CE}=\frac{AB+AC}{BC}.$$

$\{F\}=AO'\cap BD\Rightarrow AF$ là đường phân giác của $\widehat{DAB}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF}=\frac{AD}{DF}=\frac{AB+AD}{BF+DF}=\frac{AB+AD}{BD}.$$



Ta có:

$$OO' \mathbin{/\!/} (BCD)\Leftrightarrow OO' \mathbin{/\!/} EF\Leftrightarrow BE=BF$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{AB}{BF}\Leftrightarrow \frac{AB+AC}{BC}=\frac{AB+AD}{BD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}.$$

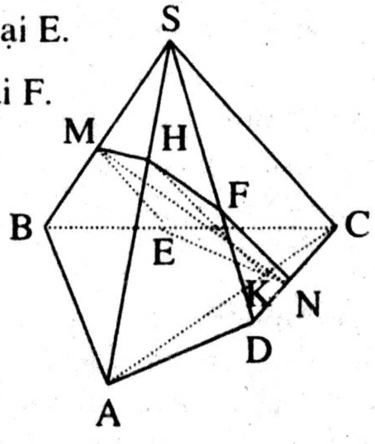
b. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với 2 mặt phẳng (BCD) và (ACD) là

$$OO' \mathbin{/\!/} CD=(BCD)\cap(ACD)\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow BC=BD \text{ và } AC=AD.$$

Bài tập 26.

a. Nhận xét rằng:

$$\left\{\begin{array}{l} SC \mathbin{/\!/} (P)\\ Mx\in(SBC)\cap(P)\\ Ny\in(SCD)\cap(P)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} Mx \mathbin{/\!/} SC \text{ và } Mx \text{ cắt } BC \text{ tại } E.\\ Ny \mathbin{/\!/} SC \text{ và } Ny \text{ cắt } SD \text{ tại } F.\end{array}\right.$$



Gọi K là giao điểm của EN với AC, ta có:

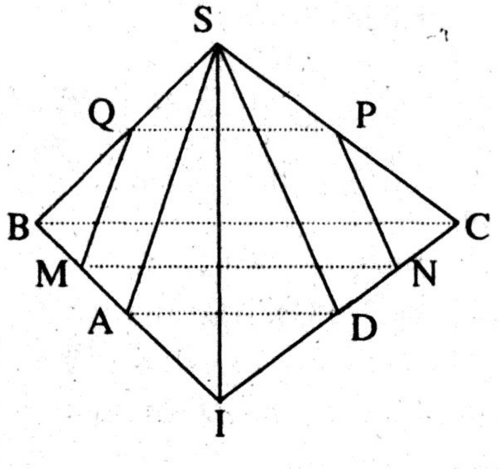
$$\left\{\begin{array}{l} SC \mathbin{/\!/} (P)\\ SC\subset(SAC)\\ Kz\in(SAC)\cap(P)\end{array}\right.\Rightarrow Kz \mathbin{/\!/} SC$$

và Kz cắt SA tại H.

b. Nối MH, FH ta được ngũ giác MENFH chính là thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng (P).

Bài tập 27.

a. Ta lần lượt có:



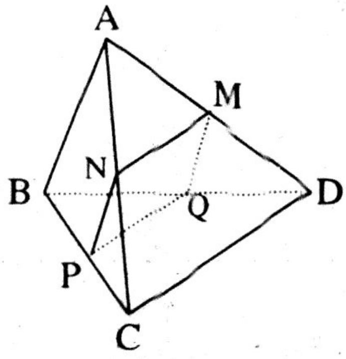
$$\left\{\begin{array}{l} SA \mathbin{/\!/} \alpha\\ SA\subset(SAB)\\ MQ\in(SAB)\cap\alpha\end{array}\right.\Rightarrow MQ \mathbin{/\!/} SA.$$

$$\left\{\begin{array}{l} BC \mathbin{/\!/} \alpha\\ MN\in(ABCD)\cap\alpha\\ PQ\in(SBC)\cap\alpha\end{array}\right.\Rightarrow MN \mathbin{/\!/} PQ \mathbin{/\!/} BC.$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{MQ}{SA}=\frac{BM}{BA}=\frac{BQ}{BS}=\frac{CN}{CD}=\frac{CP}{CS}=\frac{NP}{SD}\overset{SA=SD}{\Rightarrow} MQ=NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.



b. Đáp số trắc nghiệm D.

c. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 28.

a. Gọi α là mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

$$\begin{cases}\alpha \,//\, CD \subset (ACD)\\ Mx \in (ACD)\cap\alpha\end{cases} \Rightarrow Mx \,//\, CD \text{ và } Mx \text{ cắt } AC \text{ tại } N.$$

$$\begin{cases}\alpha \,//\, CD \subset (BCD)\\ Py \in (BCD)\cap\alpha\end{cases} \Rightarrow Py \,//\, CD \text{ và } Py \text{ cắt } BD \text{ tại } Q.$$

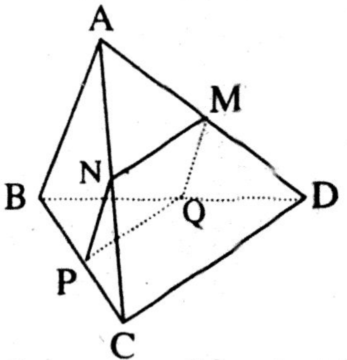
Các đoạn thẳng MN, NP, PQ, QM là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) với tứ diện. Vậy, thiết diện là tứ giác MNPQ.

Xét tứ giác MNPQ, ta có:

$MN \,//\, CD \,//\, PQ.$ (1)

$\Delta CNP = \Delta DMQ$ (c.g.c). (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là hình thang cân.



b. Đáp số trắc nghiệm A.

c. Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 29.

a. Ta có kết luận:

- p lớn nhất khi α song song với AB và CD.
- p nhỏ nhất khi α song song với AC và BD.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: s lớn nhất khi α song song với AB và CD, và đi qua trung điểm của AC.

Khi đó, ta có $s_{Max}=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}$.

Bài tập 30.

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Đáp số trắc nghiệm D.

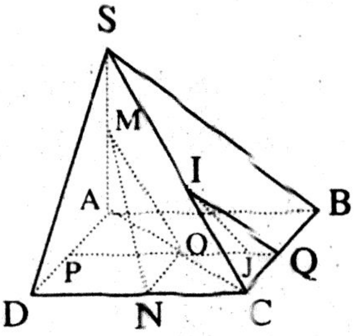
Bài tập 31. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). A; d). B; e). B; f). A.

Bài tập 32. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). B; d). A; e). A.

Bài tập 33.

a. Nhận xét rằng:

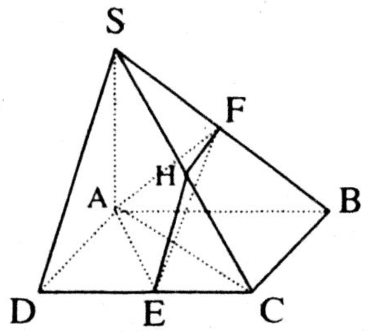
$$\begin{cases}OM \,//\, SC\\ ON \,//\, BC\end{cases} \Rightarrow (OMN) \,//\, (SBC).$$



b. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm AD và BC, suy ra J thuộc đường thẳng PQ.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}PQ \,//\, AB\\ IQ \,//\, SB\end{cases} \Rightarrow (IPQ) \,//\, (SAB) \Rightarrow IJ \,//\, (SAB).$$



c. Sử dụng tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{ED}{EC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AS}{AB}=\frac{FS}{FB}$$

suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng song song lần lượt chứa các đoạn thẳng SD, EF, CD và ta thấy ngay một trong ba mặt phẳng đó chính là (SAD), do đó:

EF // (SAD).

Chú ý: Nếu các em học sinh cảm thấy khó hiểu trong lời giải của câu c) thì có thể sử dụng lời giải tường minh hơn như sau:

Dựng EH // SD, $H \in SC$. (1)

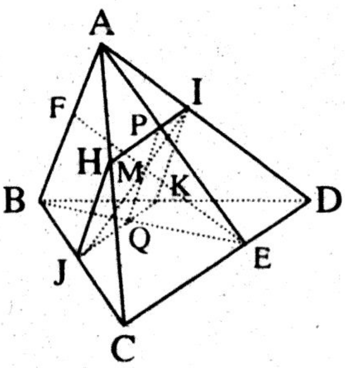
Nhận xét rằng:

$$\frac{HS}{HC}=\frac{ED}{EC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AS}{AB}=\frac{FS}{FB}\Rightarrow HF // BC \Rightarrow HF // AD. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

(HEF) // (SAD) ⇒ EF // (SAD).

Bài tập 34.



a. Dựng JH // AB, $H \in AC$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HA}{HC}=\frac{JB}{JC}=\frac{IA}{ID}\Rightarrow HI // CD. \qquad (2)$$

Gọi α là mặt phẳng chứa AB và song song với CD, suy ra α là mặt phẳng cố định và (HIJ) // α.

b. Giả sử (HIJ) cắt BD tại K, dễ thấy HIKJ là hình bình hành. Qua M kẻ PQ song song với AB ($P \in HI$ và $Q \in JK$). Ta có:

$$AP \cap BQ = E \text{ và } EM \cap AB = F.$$

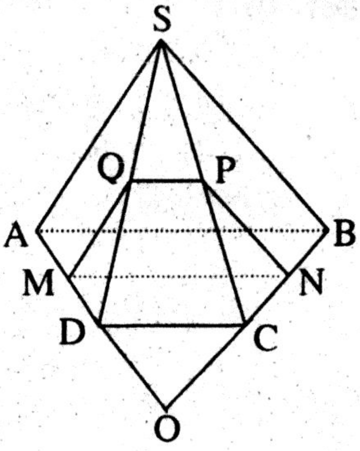
Nhận xét rằng:

$$\frac{ED}{EC}=\frac{PI}{PH}=\frac{MI}{MJ}=k \Rightarrow \text{E là điểm chia CD theo tỉ số k.}$$

$$\frac{FA}{FB}=\frac{MP}{MQ}=\frac{MI}{MJ}=k \Rightarrow \text{F là điểm chia AB theo tỉ số k.}$$

Vậy, tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k là đoạn EF với E, F lần lượt là điểm chia CD và AB theo tỉ số k.

Bài tập 35.



a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases}\alpha // (SAB)\\ MN = \alpha \cap (ABCD) \Rightarrow MN // AB.\\ AB = (SAB) \cap \end{cases}$$

Lập luận tương tự ta cũng có:

NP // BS, PQ // CD, QM // SA.

Nhận xét rằng:

MN // PQ bởi AB // CD.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DQ}{DS} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SB} \overset{SA=SB}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn điều kiện là:

$$MN + PQ = MQ + NP \Leftrightarrow MN + PQ = 2MQ. \qquad (1)$$

Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x). \qquad (2)$$

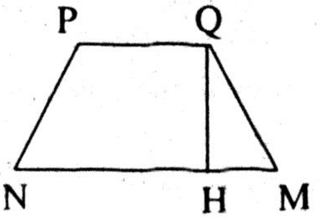
Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x. \qquad (3)$$

Giả sử AB cắt CD tại O và OD = y, ta có:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{3a} \Rightarrow 3y = a + y \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA} = \frac{OD+DM}{OD+DA} = \frac{\frac{a}{2}+a-x}{\frac{a}{2}+a} \Rightarrow MN = 3a - 2x. \qquad (4)$$



Thay (2), (3) và (4) vào (1), ta được:

$$3a - 2x + x = 4(a-x) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

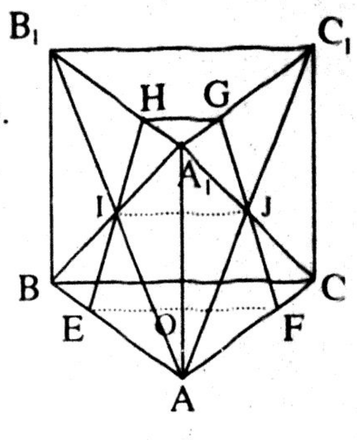
Vậy, với $x = \frac{a}{3}$ thì MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn.

Khi đó, xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

suy ra bán kính đường tròn nội tiếp MNPQ là $r = \frac{1}{2}QH = \frac{a\sqrt{7}}{6}$.

Bài tập 36.



a. Nhận xét rằng:

$$\frac{IA_1}{IB} = \frac{JA_1}{JC} = 1 \Rightarrow IJ \,//\, BC \subset (ABC) \Rightarrow IJ \,//\, (ABC).$$

b. Ta lần lượt có:

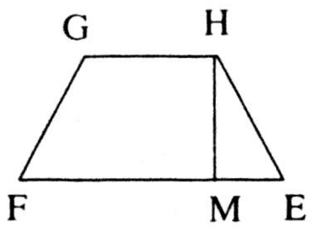
$$\begin{cases} IJ \in (IJO) \text{ và } BC \in (ABC) \\ IJ \,//\, BC \\ (IJO) \cap (ABC) = Ox \end{cases} \Rightarrow Ox \,//\, IJ \,//\, BC.$$

và Ox cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

Nối EI cắt A_1B_1 tại H và nối FI cắt A_1C_1 tại G. Như vậy, thiết diện là tứ giác EFGH.
Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}(ABC)//(A_1B_1C_1)\\ (IJO)\cap(ABC)=EF\\ (IJO)\cap(A_1B_1C_1)=GH\end{cases}\Rightarrow EF//GH\Rightarrow \text{EFGH là hình thang.}$$

Vì ΔABC nên $AA_1B_1B = AA_1C_1C$, do đó $EH = FG$.
Vậy, thiết diện EFGH là hình thang cân.



- Trong ΔABC, ta có $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow EF=\dfrac{2a}{3}$.
- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$\frac{HG}{B_1C_1}=\frac{A_1H}{A_1B_1}=\frac{BE}{BA}=\frac{1}{3}\Rightarrow HG=\frac{a}{3}.$$

- Trong ΔIBE, ta có:

$$IE^2=BI^2+BE^2-2BI.BE.\cos\widehat{IBE}=\frac{5a^2}{18}$$

$$\Rightarrow IE=\frac{a\sqrt{10}}{6}\Rightarrow EH=2IE=\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Khi đó, xét hình thang cân EFGH, hạ đường cao HM, ta có:

$$HM=\sqrt{EH^2-ME^2}=\sqrt{EH^2-\left(\frac{EF-HG}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$S_{EFGH}=\frac{1}{2}(EF+HG).HM=\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{39}}{6}=\frac{a^2\sqrt{39}}{12}.$$

Bài tập 37.

a. Gọi O, O_1 theo thứ tự là tâm của các hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$, ta có:

$$\begin{cases}A_1O//CO_1\\ BD//B_1D_1\end{cases}\Rightarrow (BDA_1)//(B_1D_1C).$$

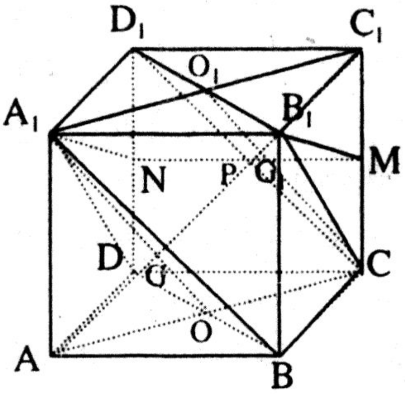
b. Vì AC_1, AO, CO_1 cùng nằm trong mặt phẳng (ACC_1A_1) nên gọi:

$G = AC_1 \cap A_1O$ và $G_1 = AC_1 \cap CO_1$.

- Trong ΔA_1BD, điểm G thuộc trung tuyến A_1O và vì $AO // A_1C_1$ nên:

$$\frac{GO}{GA_1}=\frac{AO}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$$

do đó, G là trọng tâm ΔA_1BD.



- Chứng minh tương tự G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

Nhận xét rằng OG, O_1G_1 theo thứ tự là đường trung bình của ΔACG_1 và ΔA_1C_1G nên:

$$AG = GG_1 = G_1C_1$$

tức là G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Kéo dài B_1G_1 cắt CD_1 tại P, ta có P là trung điểm của CD_1 vì G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

Ta có:

$$\begin{cases} A_1B_1 \in (A_1B_1G_1) \text{ và } C_1D_1 \in (CDD_1C_1) \\ A_1B_1 \,//\, C_1D_1 \\ (A_1B_1G_1) \cap (CDD_1C_1) = Px \end{cases} \Rightarrow Px \,//\, A_1B_1 \,//\, C_1D_1$$

giả sử Px theo thứ tự cắt CC_1 và DD_1 tại M và N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện A_1B_1MN là hình bình hành.

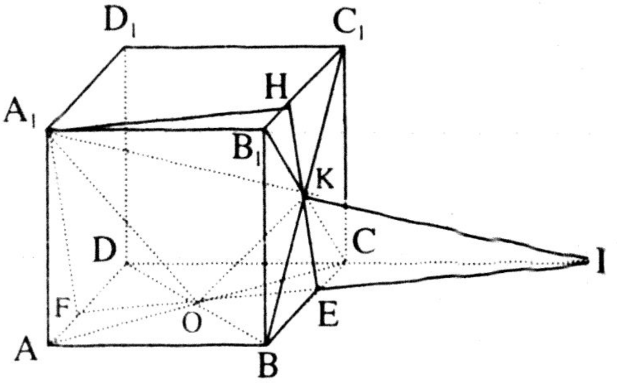
d. Ta lần lượt có:

- Trong (A_1B_1CD) giả sử:

  $A_1K \cap DC = I$.

- Nối IO cắt BC và AD theo thứ tự tại E và F.
- Nối KE cắt B_1C_1 tại H.

Nối A_1F và A_1H nhận được thiết diện A_1FEH là hình bình hành.



Bài tập 38.

a. Gọi O, O_1, I theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ và BCC_1B_1.

Nhận xét rằng:

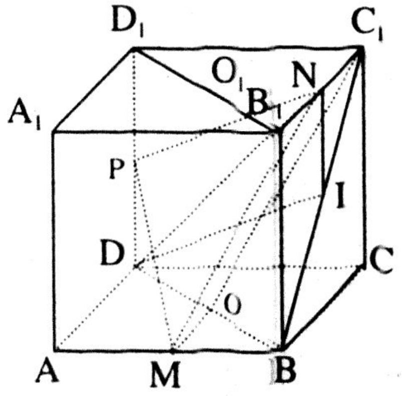
$$MO \overset{//}{=} \frac{1}{2}AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1D_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}B_1C_1 \overset{//}{=} NC_1 \Leftrightarrow MOC_1N \text{ là hình bình hành}$$

$$\Rightarrow MN \,//\, OC_1. \qquad (1)$$

$$NI \overset{//}{=} \frac{1}{2}BB_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}AA_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}DD_1 \overset{//}{=} PD$$

$\Leftrightarrow$ NIDP là hình bình hành

$$\Rightarrow PN \,//\, DI. \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \,//\, (BDC_1)$.

Mặt khác:

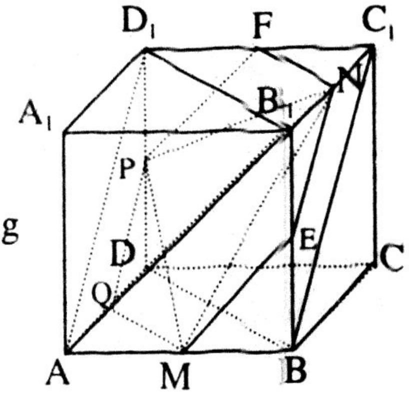
$$\begin{cases} AO_1 \,//\, C_1O \\ B_1D_1 \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow (AB_1D_1) \,//\, (BDC_1).$$

Vậy, (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Từ kết quả câu a), ta nhận xét:

$$\begin{cases} (AB_1D_1) \,//\, (MNP) \\ (AB_1D_1) \cap (A_1B_1C_1D_1) = B_1D_1 \\ (MNP) \cap (A_1B_1C_1D_1) = Nx \end{cases}$$

suy ra Nx song song với B_1D_1 và cắt C_1D_1 tại F là trung điểm của C_1D_1.



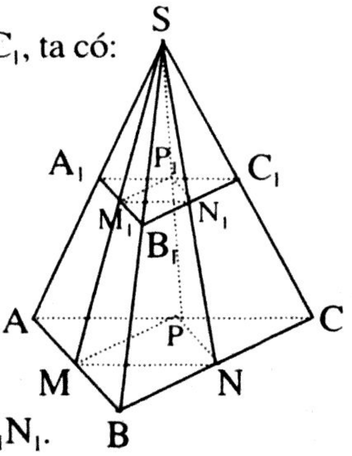
$$\begin{cases} (C_1BD) \,//\, (MNP) \\ (C_1BD) \cap (ABCD) = BD \\ (MNP) \cap (ABCD) = My \end{cases}$$

suy ra My song song với BD và cắt AD tại Q là trung điểm của AD.

Kéo dài FN cắt A_1B_1 tai G, nối GM cắt BB_1 tại E.

Vậy, thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) là lục giác MENFPQ.

Bài tập 39.



a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, ta có:

$AB // A_1B_1$

M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1B_1

suy ra $S \in MM_1$.

Tương tự, ta cũng có $S \in NN_1$ và $S \in PP_1$.

Vậy, các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại S.

b. Theo tính chất đường trung bình, ta có:

$MN // AC$

$M_1N_1 // A_1C_1$

ngoài ra, theo tính chất hình chóp cụt $AC // A_1C_1$ nên $MN // M_1N_1$.

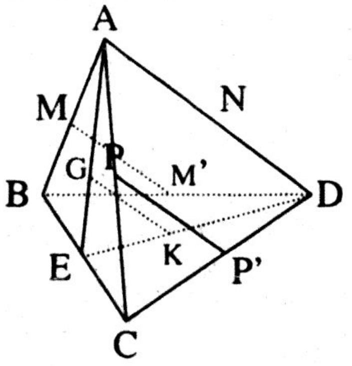
Tương tự, ta cũng có $NP // N_1P_1$, $PM // P_1M_1$.

Bài tập 40. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 41. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B; c). A; d). B.

Bài tập 42. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). A; c). A; d). A; e). B; f). A.

Bài tập 43.



a. Từ giả thiết, ta được:

$GK // AD$,

$AG \cap DK = E$ là trung điểm BC,

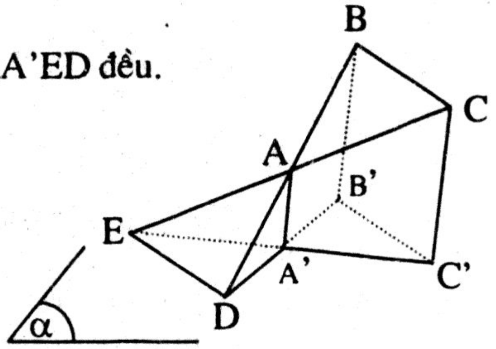
suy ra:

$$\frac{EK}{KD} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{K là trọng tâm } \Delta BCD.$$

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Trong (ABD) dựng Mx song song với AD và cắt BD tại M', khi đó M' chính là hình chiếu song song của điểm M trong phép chiếu song song ở câu a).
- Vì N thuộc AD nên D chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).
- Trong (ACD) dựng Ny song song với AD và cắt CD tại N', khi đó N' chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).

Bài tập 44.



Thực hiện cách dựng:

- Trong mặt phẳng α, dựng điểm A' sao cho ΔA'ED đều.
- Dựng hình chiếu B', C' của B và C trên mặt phẳng α theo phương chiếu AA'.

Ta đi chứng minh ΔA'B'C' là tam giác đều.

Thật vậy, ta có ngay:

E, A', C' thẳng hàng

D, A', B' thẳng hàng

ED // B'C'

suy ra ΔA'DE và ΔA'B'C' đồng dạng, tức là ΔA'B'C' là tam giác đều.

Bài tập 45. *Bạn đọc tự giải.*

CHƯƠNG III
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§ 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng, chúng có các tính chất đã biết.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Trọng tâm của tứ diện: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

2. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ. ĐIỀU KIỆN ĐỂ BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

Định nghĩa: *Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.*

Định lí 1 (***Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng***): Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.

Định lí 2: Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{d}$ bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa, các số m, n, p là duy nhất.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh một đẳng thức vectơ.

Phương pháp chung

Sử dụng:

- *Quy tắc ba điểm*: Ta có:

  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, xen điểm C.

  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.

- *Quy tắc hình bình hành*: Với hình bình hành ABCD luôn có:

  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- *Quy tắc hình hộp*: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:

  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

- *Quy tắc trung điểm*: Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB luôn có:

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$

- *Trọng tâm của tam giác*: Điểm G là trọng tâm của ΔABC khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

- *Trọng tâm của tứ diện*: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

Để thực hiện phép biến đổi tương đương cho đẳng thức cần chứng minh.

Và khi đó, ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

Bài toán 2: Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ.

Phương pháp chung

Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Bài toán 3: Chứng minh ba vectơ đồng phẳng.

Phương pháp chung

Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, ta đi chứng minh tồn tại cặp số thực m, n, sao cho:

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}. \qquad (1)$$

Chú ý: Trong trường hợp bài toán yêu cầu xác định điều kiện của tham số để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng ta sẽ xuất phát từ điều kiện (1).

Bài toán 4: Xác định điểm M thoả một đẳng thức vectơ cho trước.

Phương pháp chung

a. Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng

$$\overrightarrow{OM} = \vec{v},$$

trong đó điểm O và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

b. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

Bài toán 5: Tìm quỹ tích điểm M thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp chung

Với các bài toán quỹ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.
2. $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc mặt cầu tâm C, bán kính bằng k.AB.
3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì
   - Với $k \in \mathbf{R}$ điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
   - Với $k \in \mathbf{R}^+$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
   - Với $k \in \mathbf{R}^-$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và E là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta luôn có $4\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Bài tập 2. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi P, R theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1D_1, gọi P_1, Q, Q_1, R_1 theo thứ tự là giao điểm của các đường chéo của các mặt ABCD, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1.

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = \vec{0}$.

b. Chứng minh hai tam giác PQR và $P_1Q_1R_1$ có trọng tâm trùng nhau.

Bài tập 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B}, \qquad \overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C},$$
$$\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D}, \qquad \overrightarrow{D_1D} = -2\overrightarrow{D_1A}.$$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

a. $\overrightarrow{A_1B_1}$.

A. $\overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$.

C. $\overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$.

B. $\overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$.

D. $\overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$.

b. $\overrightarrow{A_1C_1}$.

A. $\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$. **C.** $\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$.

B. $\overrightarrow{A_1C_1} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$. **D.** $\overrightarrow{A_1C_1} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

c. $\overrightarrow{A_1D_1}$.

A. $\overrightarrow{A_1D_1} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{k}$. **C.** $\overrightarrow{A_1D_1} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{k}$.

B. $\overrightarrow{A_1D_1} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{k}$. **D.** $\overrightarrow{A_1D_1} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{k}$.

Bài tập 4. Cho tứ diện OABC. Ba điểm M, N, P trong không gian thoả mãn:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{ON} = (t+1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OP} = (t-2)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC},\ t \in \mathbf{R}.$$

a. Xác định t để ba vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng.

A. $\frac{-1 \pm \sqrt{161}}{2}$ **B.** $\frac{-1 \pm \sqrt{161}}{4}$ **C.** $\frac{-1 \pm \sqrt{161}}{6}$ **D.** $\frac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}$

b. Cho t = 0, hãy biểu diễn vectơ $\vec{v} = 5\overrightarrow{OA} + 10\overrightarrow{OB} - 15\overrightarrow{OC}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$.

A. $\vec{v} = 2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP}$. **C.** $\vec{v} = 2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP}$.

B. $\vec{v} = 4\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 4\overrightarrow{OP}$. **D.** $\vec{v} = 4\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{ON} - 4\overrightarrow{OP}$.

Bài tập 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

b. Xác định vị trí của điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}.$$

c. Chứng minh rằng khi đó với mọi điểm M trong không gian ta luôn có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = 8\overrightarrow{MO}.$$

Bài tập 6. Trong không gian, cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|.$$

Bài tập 7. Cho tứ diện ABCD, hai điểm M, N thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

Chứng tỏ rằng khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 8. Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA_1$, $SB = aSB_1$, $SC = aSC_1$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Tìm điều kiện của a, b, c để mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ đi qua trọng tâm của ΔABC.

A. $a + b + c = 1$. **C.** $a + b + c = 3$.

B. $a + b + c = 2$. **D.** $a + b + c = 4$.

Bài tập 9. Trong không gian, cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, M là điểm di động.

a. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ là một vectơ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b. M_0 là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AM_0} = \vec{v}$ và giả sử đường thẳng AM_0 cắt BC tại N. Chứng minh rằng $\overrightarrow{NB} = 3\overrightarrow{NC}$.

c. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với $\vec{v}$. Chứng tỏ rằng khi M di chuyển trong mặt phẳng (P) thì tổng sau có giá trị không đổi:

$$S = 2MA^2 + MB^2 - 3MC^2.$$

Bài tập 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi E là trọng tâm ΔBCD, I, I_1, J, J_1, K, K_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, CA, BD, AD, BC. Điểm G thoả mãn hệ thức:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{II_1} + \overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{KK_1} = 2\overrightarrow{AG}$.

b. Ba điểm A, E, G thẳng hàng.

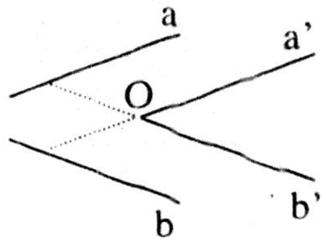
§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1: *Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.*

Chú ý: Để xác định (a, b) ta có thể lấy điểm O nằm ngay trên một trong hai đường thẳng đó.



2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 2: *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.*

Nhận xét: Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì vuông góc với đường thẳng thứ hai.

Tức là:

$$\begin{cases} a \,//\, b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp chung

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Tìm góc* bằng việc lấy một điểm O nào đó (thông thường $O \in a$ hoặc $O \in b$). Qua O dựng a' và b' theo thứ tự song song với a và b. Khi đó, góc nhọn hoặc vuông tạo bởi a'và b' là góc giữa a và b.

Bước 2: *Tính góc*: Sử dụng tỷ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí hàm số côsin trong tam giác thường để xác định số đo góc giữa a' và b'.

Bài toán 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Phương pháp chung

Để chứng minh a vuông góc với b, ta lựa chọn theo hướng:

Hướng 1: Chứng minh $(a, b) = 90^0$.

Hướng 2: Sử dụng kết quả về liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của hai đường thẳng.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 11. Mỗi khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 12. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD.

a. Hãy tính cosin của góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

b. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60 **D.** 90^0.

Bài tập 13. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a, SAB là tam giác vuông cận tại A, M là điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng α qua M song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông.

b. Đặt AM = x. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

A. $\frac{1}{4}(2a^2 - x^2)$. **B.** $\frac{1}{8}(2a^2 - x^2)$. **C.** $\frac{1}{4}(4a^2 - x^2)$. **D.** $\frac{1}{8}(4a^2 - x^2)$.

Bài tập 14. Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

a. Chứng minh rằng AO vuông góc với CD.

b. Gọi M là trung điểm CD. Tính cosin góc giữa AC và BM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Bài tập 15. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

a. Chứng minh rằng SA vuông góc với BC và CD.

b. Chứng minh rằng SA vuông góc với AC và BD.

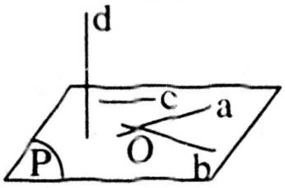
§ 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí mở đầu: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Như vậy:



$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ d \perp a \text{ và } d \perp b \end{cases} \Rightarrow \forall c \subset \alpha \text{ luôn có } d \perp c.$$

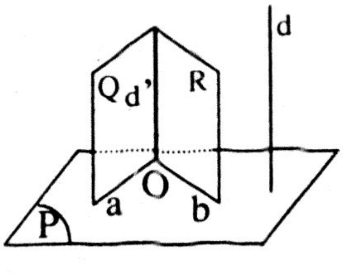
Định nghĩa 1: *Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng đó.*

Định lí 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

2. CÁC TÍNH CHẤT

Tính chất 1: Qua một điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

Cách dựng:

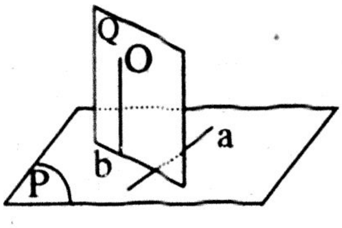


- Qua O dựng đường thẳng d' // d.
- Lấy hai mặt phẳng phân biệt (Q) và (R) cùng đi qua d'. Trong (Q) dựng đường thẳng a qua O và vuông góc với d'. Trong (R) dựng đường thẳng b qua O và vuông góc với d'

Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng cần dựng.

Tính chất 2: Qua một điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Cách dựng:



- Lấy đường thẳng a nằm trong (P).
- Dựng mặt phẳng (Q) qua O vuông góc với a cắt (P) theo giao tuyến b.

- Trong (Q) dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với b

Khi đó, đường thẳng d chính là đường thẳng cần dựng.

3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Tính chất 3:

a. Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 4:

a. Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 5:

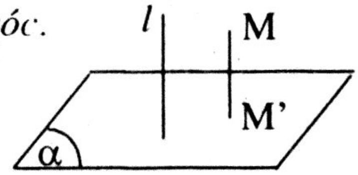
a. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.

b. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

4. ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 2 (Phép chiếu vuông góc): *Phép chiếu song song trong đó phương chiếu vuông góc với mặt chiếu gọi là phép chiếu vuông góc.*

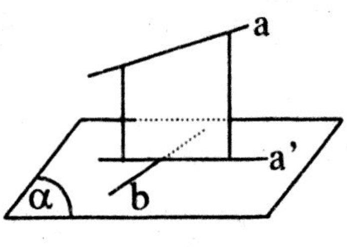
Chú ý: Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.



Định lí 2 (*Định lí ba đường vuông góc*): Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi ấy, một đường thẳng b nằm trong (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.

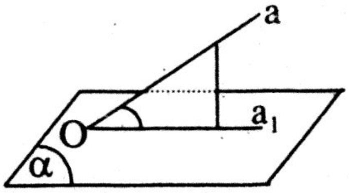
Tức là:

$$a \perp b \subset (P) \Leftrightarrow a' \perp b.$$



5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Định nghĩa 3: *Góc giữa đường thẳng* a *và mặt phẳng* (P) *là góc giữa đường thẳng* a *và hình chiếu* a' *của nó trên* (P), kí hiệu là (a, (P)) hay ((P), a).



Đặc biệt:

- Khi a thuộc (P) hoặc a song song với (P) thì (a, (P)) = 0^0.
- Khi a vuông góc với (P) thì (a, (P)) = 90^0.

Như vậy, ta luôn có $0 \le (a, (P)) \le 90^0$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng – Mặt phẳng trung trực.
Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Phương pháp chung

1. Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:
   Cách 1: Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P).
   Cách 2: Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với (P).
2. Để chứng minh mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta đi chứng minh (P) vuông góc với AB tại trung điểm I của AB
3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:
   Cách 1: Chứng minh đường thẳng a vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng b.
   Cách 2: Sử dụng định lí ba đường vuông góc.
   Cách 3: Nếu hai đường thẳng ấy cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp đã học trong hình học phẳng.

Bài toán 2: Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Phương pháp chung

Để tìm thiết diện của khối đa diện (S) với mặt phẳng (P), (P) qua điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng d cho trước, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Dựng mặt phẳng (P) như sau:

- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d, trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M.
- Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là α.
- Xác định thiết diện theo phương pháp đã học.

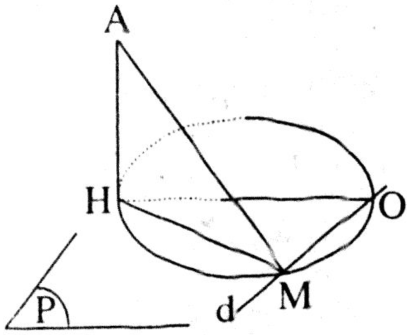
Cách 2: Nếu có hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông góc với d thì:

(P) // a hay chứa a
(P) // b hay chứa b

Bài toán 3: Tập hợp hình chiếu của một điểm cố định trên một đường thẳng di động.

Phương pháp chung

Với yêu cầu "*Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc M của điểm cố định A trên đường thẳng d di động trong mặt phẳng* (P) *cố định và luôn qua một điểm cố định O*", ta thực hiện theo các bước sau:



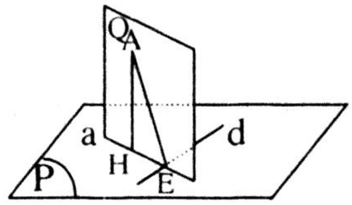
Bước 1: Dựng AH $\perp$ (P) (H $\in$ (P)), theo định lí ba đường vuông góc ta có HM $\perp$ d.

Bước 2: Trong mặt phẳng (P), vì $\widehat{HMO} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong (P).

Bài toán 4: Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của một điểm cố định trên một mặt phẳng di động.

Phương pháp chung

Với yêu cầu "*Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc* H *của một điểm cố định* A *trên mặt phẳng* (P) *di động luôn chứa một đường thẳng* d *cố định*", ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Xác định mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d. Tìm a = (P) ∩ (Q)

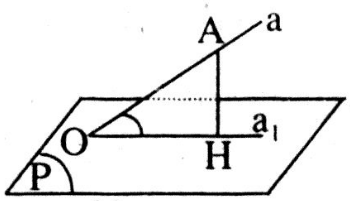
Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên a, thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Bước 3: Gọi E là giao điểm của d với (Q). Trong mặt phẳng (Q), ta có $\widehat{AHE} = 90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

Bài toán 5: Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng.

Phương pháp chung

Để tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Tìm giao điểm O của a với (P).

Bước 2: Chọn điểm A ∈ a và dựng AH ⊥ (P), với H ∈ (P).

Khi đó AOH = (a, (P))

Bước 3: Tính số đo của AÔH dựa trên các hệ thức lượng giác.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 16. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh rằng BC ⊥ (OAH), CA ⊥ (OBH), AB ⊥ (OCH).

b. Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC.

c. Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

d. Chứng minh rằng các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Bài tập 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

a. Chứng minh rằng BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD).

b. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

c. Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong một mặt phẳng.

d. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK. Từ đó suy ra HK ⊥ AI.

e. Tính diện tích tứ giác AHIK, biết SA = AB = a.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.　**B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.　**C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.　**D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Bài tập 18. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng SI ⊥ (SCD), SJ ⊥ (SAB).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh rằng SH ⊥ AC và tính độ dài SH.

c. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM và SA vuông góc với nhau. Tính độ dài AM theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập 19. Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh bằng a. SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AC, α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AC.

a. Tuỳ theo vị trí của điểm M trên cạnh AC, có nhận xét gì về thiết diện tạo bởi α với tứ diện S.ABC.

b. Đặt CM = x, với 0 < x < a. Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x và xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

Bài tập 20. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với (ABCD). Gọi AH là đường cao của ΔSAB.

a. Tính tỉ số $\frac{SH}{SB}$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

b. Tính độ dài AH.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

c. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB, α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

d. Tính diện tích của thiết diện tìm được ở câu b).

A. $\frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{5a^2\sqrt{6}}{16}$. C. $\frac{5a^2\sqrt{6}}{14}$. D. $\frac{5a^2\sqrt{6}}{12}$.

Bài tập 21. Cho hình vuông ABCD tâm O; S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB.

b. Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh D trong ΔSDC.

Bài tập 22. Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C), đường kính AB, SA vuông góc với α. Gọi M là một điểm di động trên (C), H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (SBM). Tìm tập hợp các điểm H.

Bài tập 23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên cạnh SB.

a. Khi M là trung điểm của cạnh SB, tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (ADM).

b. Khi M di động trên cạnh SB, tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ADM).

Bài tập 24. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0.

a. Tính độ dài MN.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

b. Tính độ dài SO.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

c. Tính sin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài tập 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính góc giữa SC và (ABCD).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

b. Tính tang góc giữa SC và (SAB).

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{11}}$.

c. Tính sin góc giữa SB và (SAC).

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

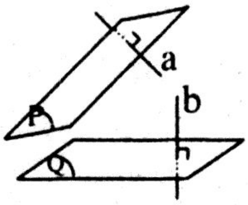
d. Tính sin góc giữa AC và (SBC).

A. $\frac{3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{14}}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{21}}$.

§ 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



Định nghĩa 1: *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

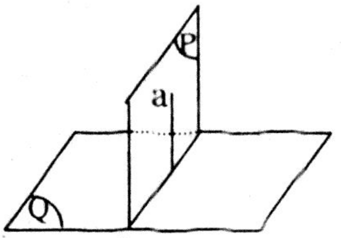
Đặc biệt: Khi (P) và (Q) trùng nhau hoặc song song với nhau thì $(a, b) = 0^0$.

Định lí 1: Nếu S là diện tích của một đa giác $\mathcal{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathcal{H}'$ của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P') thì S' = S.cosφ, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa: ***Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau*** *nếu góc giữa chúng bằng* 90^0.

Định lí 2 (*Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc*): *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Như vậy:

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \exists a \in (P): a \perp (Q).$$

Hệ quả 1:

a. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trên (P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

b. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc mặt phẳng (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q).

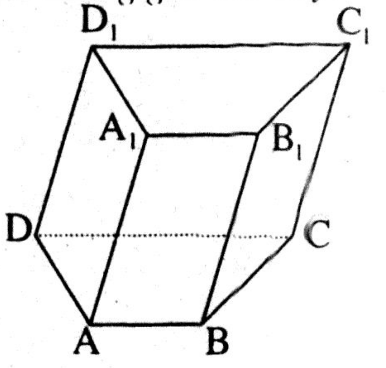
Hệ quả 2: Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Hệ quả 3: Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

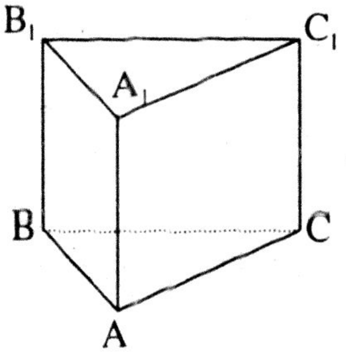
3. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT. HÌNH LẬP PHƯƠNG

Định nghĩa 3: *Một hình lăng trụ được gọi là hình lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với các mặt đáy.*

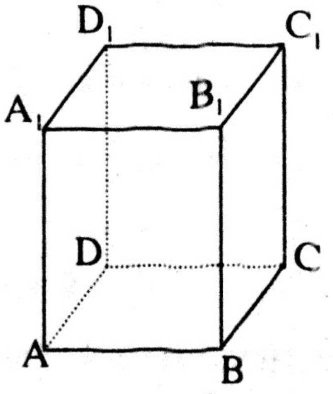
Nhận xét rằng *các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật và đều vuông góc với đáy.*



Lăng trụ



Lăng trụ đứng



Lăng trụ đều

Ta có các trường hợp:

1. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là một miền đa giác đều được gọi là lăng trụ đều.* Như vậy, lăng trụ đều có các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.
2. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.* Như vậy, hình hộp đứng có bốn mặt bên là những hình chữ nhật và hai đáy là hình bình hành.

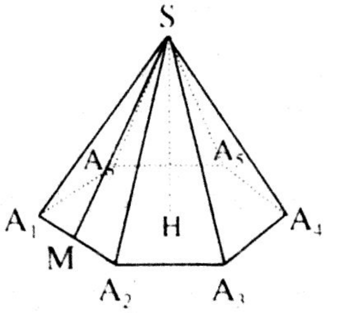
3. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.* Như vậy, hình hộp chữ nhật có sáu mặt đều là những hình chữ nhật.
4. *Hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*

4. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

***Định nghĩa 4**: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là miền đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đa giác đều đó.*

Nhận xét rằng *các cạnh bên của hình chóp đều thì bằng nhau và các mặt bên của nó là những tam giác cân bằng nhau.*

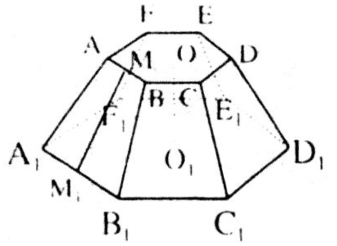
Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp với trung điểm của một cạnh đáy bất kì gọi là *trung đoạn* của hình chóp đều.



***Định nghĩa 5**: Một hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.*

Khi đó:

- Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng.
- Đường nối tâm OO_1 của hai đáy gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.
- Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cụt đều.



II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính góc giữa hai mặt phẳng.

Phương pháp chung

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta lựa chọn một trong hai cách sau:

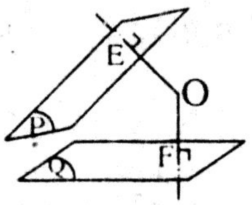
Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn điểm O, từ đó hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với (P) và (Q).

Bước 2: Tính số đo của góc $\widehat{EOF}$.

Bước 3: Khi đó:

- $((P),(Q)) = \widehat{EOF}$, nếu $\widehat{EOF} \le 90^0$.
- $((P),(Q)) = 180^0 - \widehat{EOF}$, nếu $\widehat{EOF} > 90^0$.

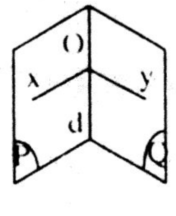


Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2: Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.



Bước 3: Tính số đo của góc xOy.

Bước 4: Khi đó:

- $((P),(Q)) = \widehat{xOy}$, nếu $\widehat{xOy} \le 90^0$.
- $((P),(Q)) = 180^0 - \widehat{xOy}$, nếu $\widehat{xOy} > 90^0$.

Bài toán 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.
Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Phương pháp chung

1. Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
2. Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ngoài những cách đã biết, ta còn có thêm hai cách sau:

   Cách 1: Sử dụng kết quả của định lí 1.

   Cách 2: Sử dụng kết quả của định lí 3.

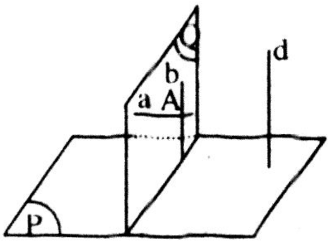
Bài toán 3: Xác định mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng (P) (a không vuông góc với (P)) – Thiết diện.

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một điểm A trên a sao cho qua A có thể dựng được đường thẳng b vuông góc với (P) một cách dễ nhất.

Bước 2: Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng (Q) cần dựng.



Chú ý: Nếu có đường thẳng d ⊥ (P) thì (Q) // d hay (Q) chứa d.

Bài toán 4: Hình lăng trụ đứng.

Phương pháp chung

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ đứng để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ đứng cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

Bài toán 5: Hình chóp đều – Hình chóp cụt đều.

Phương pháp chung

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình chóp đều và hình chóp cụt đều để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình chóp đều và hình chóp cụt đều cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 26. Các mệnh đề sau là đúng hay sai ?

a. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

A. Đúng. **B.** Sai.

f. Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

A. Đúng. **B.** Sai.

g. Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài tập 27. Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC), (ABD) cùng vuông góc với mặt phẳng (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD và đường cao DK của ΔACD.

a. Chứng minh rằng $AB \perp (BCD)$.

b. Chứng minh rằng $(ABE) \perp (ADC)$ và $(DFK) \perp (ADC)$.

c. Gọi O và H lần lượt là trực tâm của ΔBCD và ΔACD. Chứng minh rằng $OH \perp (ACD)$.

Bài tập 28. Cho ΔACD và ΔBCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a. Chứng minh rằng IJ vuông góc với AB và CD.

b. Tính AB và IJ theo a và x.

A. $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$ và $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$.

B. $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ và $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$.

C. $AB = \sqrt{3(a^2 - x^2)}$ và $IJ = \dfrac{\sqrt{3(a^2 - x^2)}}{2}$.

D. $AB = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ và $IJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

c. Xác định x sao cho $(ABC) \perp (ABD)$.

A. $a = 2x\sqrt{2}$. **B.** $a = x\sqrt{2}$. **C.** $a = x\sqrt{3}$. **D.** $a = 2x\sqrt{3}$.

Bài tập 29. Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình vuông cạnh a. $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi α là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a. Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Bài tập 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A_1C_1.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua MN và vuông góc với (BCC_1B_1). Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện.

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$.

Bài tập 31. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng α cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1.

a. Xét đặc điểm của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ khi A_1B_1 hoặc A_1C_1 hoặc cả hai đường thẳng đó song song với mặt phẳng (ABCD).

b. Chứng minh rằng $\frac{1}{SA_1} + \frac{1}{SC_1} = \frac{1}{SB_1} + \frac{1}{SD_1}$.

Bài tập 32. Cho ΔABC vuông tại A có cạnh huyền BC thuộc mặt phẳng (P). Gọi β, γ là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC với (P). Gọi α là góc hợp bởi (ABC) với (P). Chứng minh rằng $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Bài tập 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a$. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

Bài tập 34. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài tập 35. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABC vuông tại B, AB = a, $\widehat{BAC} = \alpha$, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi β là góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC).

a. Chứng minh rằng $\tan\alpha.\tan\beta = \frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

b. ΔABC phải thoả thêm điều kiện gì để $\beta = 60^0$.

§ 5. KHOẢNG CÁCH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG, ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 1: *Khoảng cách từ điểm* M *đến mặt phẳng* (P) (*đến đường thẳng* d) *là khoảng cách giữa hai điểm* M *và* H, *trong đó* H *là hình chiếu vuông góc của điểm* M *trên mặt phẳng* (P) (*trên đường thẳng* d).

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG , GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định nghĩa 2: *Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng* (P) *song song với* a *là khoảng cách từ một điểm nào đó của* a *đến mặt phẳng* (P).

Định nghĩa 3: *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

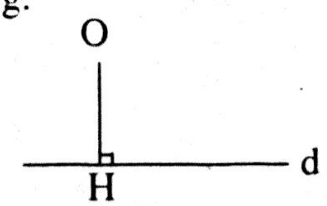
Định lí: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn có duy nhất một đường thẳng d cắt cả a và b, và vuông góc với mỗi đường thẳng ấy. Đường thẳng d được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

Định nghĩa 4: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.*

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

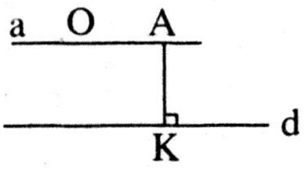
Phương pháp chung



Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Trong mặt phẳng (O, d) hạ OH ⊥ d với H ∈ d.

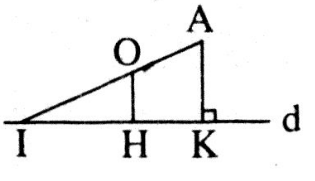
Bước 2: Thực hiện việc xác định độ dài OH dựa trên hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.



Chú ý:

1. Nếu tồn tại đường thẳng a qua O và song song với d thì:

$$d(O, d) = d(A, d), \text{ với } A \in d.$$

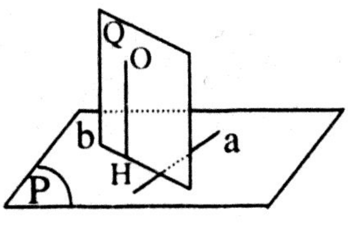


2. Nếu $AO \cap d = I$ thì:

$$\frac{d(O,d)}{d(A,d)} = \frac{OI}{AI}.$$

Bài toán 2: Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

Phương pháp chung



Để tính khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Để dựng OH với H là hình chiếu vuông góc của O lên (P), ta thực hiện:

- Lấy đường thẳng a nằm trong (P).

- Dựng mặt phẳng (Q) qua O vuông góc với a cắt (P) theo giao tuyến b (cần chọn a sao cho mặt phẳng (Q) dễ dựng).
- Trong (Q), hạ OH ⊥ b tại H.

Bước 2: OH là khoảng cách từ O đến α.
Tính độ dài của đoạn OH là khoảng cách từ A đến (P).

Bài toán 3: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

Phương pháp chung

1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α, để tính khoảng cách giữa d và α ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một điểm A trên d, sao cho khoảng cách từ A đến α có thể được xác định dễ nhất.

Bước 2: Kết luận d(d, (P)) = d(A, (P)).

2. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q), để tính khoảng cách giữa (P) và (Q) ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Chọn một điểm A trên (P), sao cho khoảng cách từ A đến (Q) có thể được xác định dễ nhất.

Bước 4: Kết luận d((P), (Q)) = d(A, (Q)).

Bài toán 4: Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp chung

1. Để dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta lựa chọn một trong các cách sau:

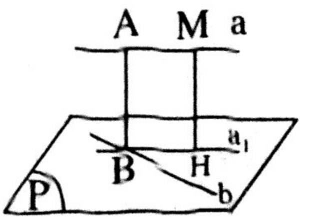
Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) chứa b song song với a.

Bước 2: Chọn M trên a, dựng MH vuông góc với α tại H.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng a_1 song song với a, và cắt b tại B.

Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt (P) tại A. Đoạn AB là đoạn thẳng vuông góc chung của a và b.



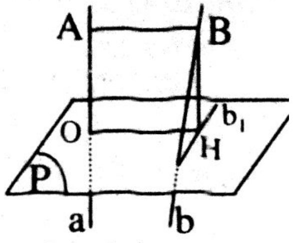
Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

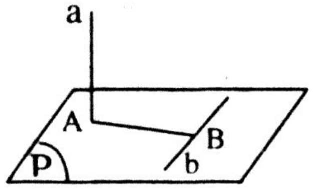
Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a và tại O.

Bước 2: Dựng hình chiếu vuông góc b_1 của b trên α. Dựng hình chiếu vuông góc H của O trên b_1.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.

Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A. Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.





Cách 3: (*Áp dụng cho trường hợp* a $\perp$ b): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) chứa b, vuông góc với a tại A.

Bước 2: Dựng AB $\perp$ b tại B. Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Tính độ dài đoạn vuông góc chung (nếu có).

Cách 2: Tính d(a, α) với α là mặt phẳng chứa b song song với a.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài tập 36. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

a. Chứng minh rằng OI $\perp$ (ABCD).

b. Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{35}}{5}$.

Bài tập 37. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

c. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

d. Tính khoảng cách từ trọng tâm của ΔSAB đến (SAC).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{8}$.

Bài tập 38. Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, A $\widehat{ASC}$ C $= 120^0$ và SA = SB = SC = a. Gọi I là trung điểm của cạnh AC.

a. Chứng minh rằng SI $\perp$ (ABC).

b. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{4a}{5}$.

Bài tập 39. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC.

a. Chứng minh rằng (MNP) // (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài tập 40. Cho hình chóp S.ABCD có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a.

a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** 2a.

b. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

c. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

d. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

A. $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$.

Bài tập 41. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a. SB và AD.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b. SC và BD.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$.

c. SB và CD.

A. a. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

d. SC và AD.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

e. SB và AC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài tập 42. Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AB = a. Gọi M là trung điểm của AC.

a. Hãy dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC.

A. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{15}}{15}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{11}}{11}$.

Bài tập 43. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\hat{A} = 60^0$ và có đường cao SO = a.

a. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{16}$.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 44. Cho đường tròn đường kính AB = 2R chứa trong mặt phẳng α, SA vuông góc với mặt phẳng α và SA = h, với $0 < h < 2R$. Gọi M là một điểm di động trên đường tròn. Xác định vị trí của M để đoạn nối trung điểm hai đoạn AM và SB là đoạn thẳng vuông góc chung của chúng, khi đó tính độ dài của đoạn vuông góc chung này.

Bài tập 45. Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại C với AB = 2a, $\widehat{BAC} = 30^0$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC. H là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

a. Chứng minh rằng AH vuông góc với BM.

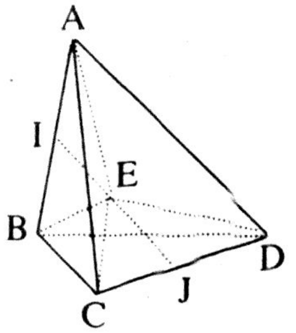
b. Đặt AM = x, với $0 \le x \le \sqrt{3}$. Tính khoảng cách h từ S đến BM theo a và x.

A. $h = \sqrt{\frac{x^2a^2 - xa^3\sqrt{3} + a^4}{x^2 - 2ax\sqrt{3} + a^2}}$. **C.** $h = \sqrt{\frac{x^2a^2 - 8xa^3 + 16a^4}{x^2 - 2ax + 4a^2}}$.

B. $h = \sqrt{\frac{5x^2a^2 - 8xa^3\sqrt{3} + 16a^4}{x^2 - 2ax\sqrt{3} + 4a^2}}$. **D.** $h = \sqrt{\frac{x^2a^2 - xa^3 + a^4}{x^2 - ax + a^2}}$.

c. Tìm các giá trị của x để khoảng cách h có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ



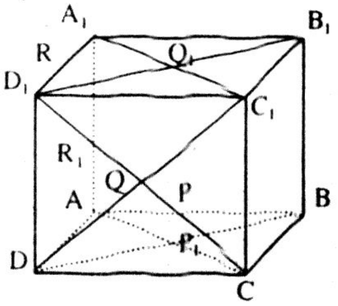
Bài tập 1. Sử dụng quy tắc ba điểm bằng cách xen vào giữa, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC},$$
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ED},$$

suy ra:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{ME} + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED})$$
$$= 4\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EI} + 2\overrightarrow{EJ} = 4\overrightarrow{ME}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 2.



a. Ta có:

$$\overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{QQ_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1},$$
$$\overrightarrow{RR_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B},$$

suy ra:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1B}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

b. Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác PQR và $P_1Q_1R_1$, ta có:

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1P_1}, \qquad \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1Q_1},$$
$$\overrightarrow{RR_1} = \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1R_1},$$

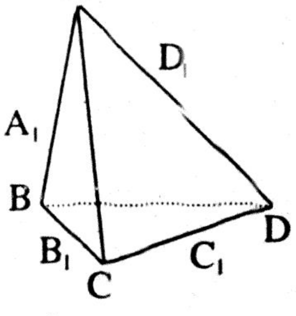
suy ra:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{RG}) + 3\overrightarrow{GG_1} + (\overrightarrow{G_1P_1} + \overrightarrow{G_1Q_1} + \overrightarrow{G_1R_1})$$
$$\Leftrightarrow \vec{0} = 3\overrightarrow{GG_1} \Leftrightarrow G \equiv G_1.$$

Bài tập 3. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). C.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B} = -2(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\vec{i}.$$



$$\overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C} \Leftrightarrow \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = -2(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B_1A} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j}).$$
$$\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} = -2(\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AD})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{3}(\vec{j} + 2\vec{k}).$$
$$-2\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\vec{k}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{B_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{C_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}(\vec{j} + 2\vec{k}) = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{D_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Tổng quát hoá: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{A_1A} = t\overrightarrow{A_1B},\ \overrightarrow{B_1B} = t\overrightarrow{B_1C},\ \overrightarrow{C_1C} = t\overrightarrow{C_1D},\ \overrightarrow{D_1D} = t\overrightarrow{D_1A}.$$

với $t \neq 0, 1$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Bằng phương pháp tương tự như đã trình bày trong lời giải trên, chúng ta sẽ nhận được kết quả:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1+t}{1-t}\vec{i} - \frac{t}{1-t}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t}\vec{j} - \frac{t}{1-t}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t}\vec{k}.$$

Bài tập 4.

a. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Để $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng điều kiện là tồn tại cặp số thực α, β, sao cho:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{ON} + \beta\overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} = \alpha[(t+1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}] + \beta[(t-2)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}]$$

$$= \alpha(t+1)\overrightarrow{OA} + [2\alpha + \beta(t-2)]\overrightarrow{OB} + (\alpha + 2\beta)\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha(t+1) \\ t = 2\alpha + \beta(t-2) \\ -2 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow 4t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}.$$

Vậy, với $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}$ thì $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Với t = 0, ta được:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}. \quad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) theo các ẩn $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ta được:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}), \quad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{10}(-2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP}),$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{5}(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}),$$

suy ra:

$$\vec{v} = (3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}) + (-2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP}) - 3(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$$

$$= 4\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 4\overrightarrow{OP}.$$

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AC}.$$

b. Gọi O là giao điểm của AC_1 và A_1C, ta có ngay:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} =$$

$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD_1}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB_1}) = \vec{0}.$$

c. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} =$$

$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) +$$

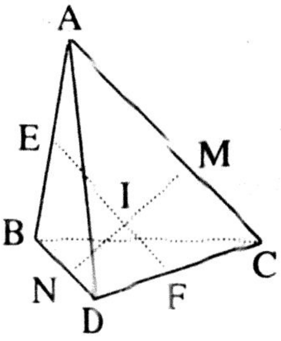
$$+ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD_1})$$

$$= 8\overrightarrow{MO}.$$

Bài tập 6. Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta biến đổi được đẳng thức về dạng:

$$|3\overrightarrow{MG}| = |3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{GA}|$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc mặt cầu tâm G, bán kính GA.



Bài tập 7. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, ta có:

$$2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB},$$

$$2\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND},$$

suy ra:

$$2(\overrightarrow{IE} + t\overrightarrow{IF}) = \overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow I \in EF.$$

Vậy, khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường thẳng EF

Bài tập 8. Đáp số trắc nghiệm C.

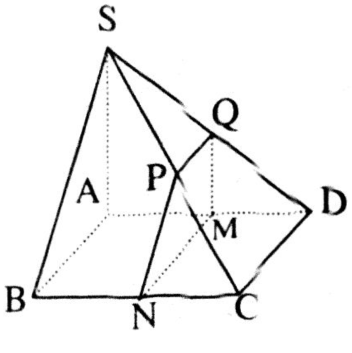
Bài tập 9. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 10. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 11. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B.

Bài tập 12. Đáp số trắc nghiệm a). D; b). C.

Bài tập 13.



a. Ta có:

$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ \alpha \cap (SAD) = MQ \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow MQ // SA. \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ \alpha \cap (ABCD) = MN \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow MN // AB. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NMQ} = 90^0$.

Mặt khác, ba mặt phẳng (ABCD), (SCD) và α cắt nhau theo ba giao tuyến MN, CD, PQ có:

$MN // CD \Rightarrow MN // PQ \Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông.

b. Đáp số trắc nghiệm D.

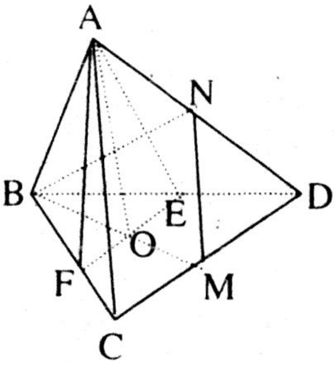
Bài tập 14.

a. Qua O dựng đường thẳng song song với CD, cắt BC, BD theo thứ tự tại E và F, suy ra:

$(AO, CD) = AOF$.

Ta có:

$$\begin{cases} EF // CD \\ BC = BD \\ MC = MD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BF \\ OE = OF \end{cases}.$$



Xét hai tam giác ΔABE và ΔABF, ta có:

$$\begin{cases} BE = BF \\ AB \text{chung} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ABF \Rightarrow AE = AF$$

$\Leftrightarrow \Delta AEF$ cân tại A $\Rightarrow AO \perp EF \Leftrightarrow \widehat{AOF} = 90^0 \Leftrightarrow AO \perp CD$.

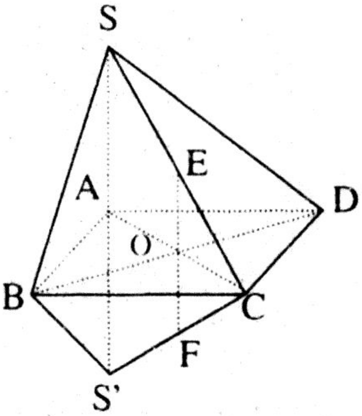
b. Đáp số trắc nghiệm C.

Bài tập 15.

a. Ta có:

$$\begin{cases} BC // AD \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA.$$

$$\begin{cases} CD // AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SA.$$



b. Trên tia SA lấy điểm S' sao cho AS = AS', ta có:

AB, AD đều là trung trực của SS'

$\Rightarrow BS = BS'$ và $DS = DS' \Rightarrow \Delta SBD = \Delta S'BD$ (c.c.c)

$\Rightarrow OS = OS' \Rightarrow \Delta OSS'$ cân tại O $\Rightarrow OA \perp SS' \Leftrightarrow AC \perp SA$.

Trong (CSS') kẻ Ox song song với SS' và cắt SC, S'C theo thứ tự tại E, F và là trung điểm của mỗi đường, ta có ngay:

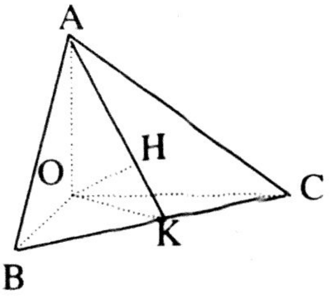
EF // SA.

Mặt khác, vì:

$\Delta SBC = \Delta S'BC$ (c.c.c) $\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B $\Rightarrow OB \perp EF \Leftrightarrow BD \perp SA$.

Chú ý: Đề nghị các em học sinh đề xuất một cách giải khác để chứng minh SA vuông góc với BD.

Bài tập 16.



a. Từ giả thiết:

$$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Leftrightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

Chứng minh tương tự ta nhận được $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$$BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH. \qquad (3)$$

$$AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra H là trực tâm của ΔABC.

c. Giả sử AH cắt BC tại K, suy ra $OK \perp BC$.

- Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

- Trong ΔOAK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}, \text{ đpcm.}$$

d. Giả sử $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Xét ΔABC vuông tại O, ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$, $\quad BC^2 = OB^2 + OC^2 = b^2 + c^2$,

$AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + c^2$,

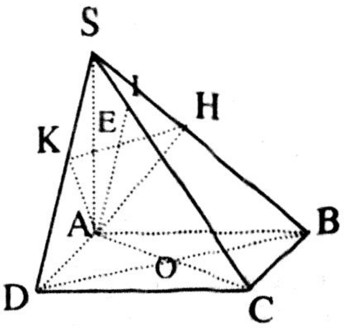
$$\cos B\hat{A}C = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$$

$\Rightarrow$ góc $B\hat{A}C$ nhọn.

Chứng minh tương tự, ta được các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ đều nhọn.

Vậy, các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Bài tập 17.



a. Từ giả thiết:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$AB \perp BC$, vì ABCD là hình vuông. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta được $CD \perp (SAD)$.

b. Từ giả thiết:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD. \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$AC \perp BD$, vì ABCD là hình vuông. (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$BD \perp (SAC)$ tại trung điểm O của BD.

Vậy, (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD.

c. Từ giả thiết và kết hợp với kết quả câu a), ta được:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Chứng minh tương tự ta được $AK \perp SC$.

Như vậy, vì AH, AI, AK cùng vuông góc với SC nên ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

d. Giả sử HK cắt AI tại E.

Nhận xét rằng:

$$\Delta SAB = \Delta SAD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow SH = SK.$$

Trong ΔSBD, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD \text{ và E là trung điểm của HK.}$$

Kết hợp với kết quả ở câu a), suy ra:

$HK \perp (SAC)$ tại trung điểm E của HK.

Vậy, (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK.

Từ kết quả $HK \perp (SAC)$ suy ra $HK \perp AI$.

e. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}AI.HK. \quad (5)$$

trong đó:

- Trong ΔSAC vuông tại A, ta được:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (6)$$

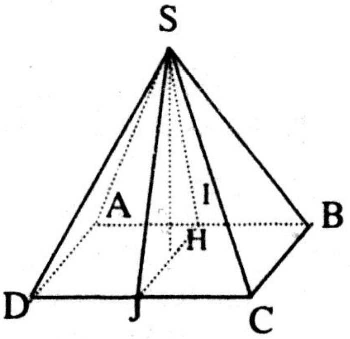
- Trong ΔSBD, ta được:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{HK là đường trung bình} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (7)$$

Thay (6), (7) vào (5), ta được;

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Bài tập 18.



a. Xét ΔSIJ, ta lần lượt có:

$IJ = a$, đường trung bình của hình vuông.

$SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đường cao trong tam giác đều

$SJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$, trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông.

Nhận xét rằng:

$$SI^2 + SJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ \text{ vuông tại S} \Leftrightarrow SI \perp SJ.$$

Khi đó, với:

$$\begin{cases} CD \perp SJ \\ CD \perp IJ \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SI \overset{SI \perp SJ}{\Rightarrow} SI \perp (SCD).$$

Chứng minh tương tự, ta được SJ ⊥ (SAB).

b. Ta có:

$SH \perp CD$, theo kết quả trong a) có $CD \perp (SIJ)$

$SH \perp IJ$, theo giả thiết

suy ra:

$$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC.$$

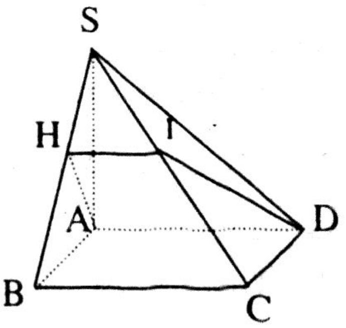
Trong ΔSIJ ta có:

$$S_{\Delta SIJ} = \frac{1}{2}SH.IJ = \frac{1}{2}SI.SJ \Rightarrow SH = \frac{SI.SJ}{IJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

c. Đáp số trắc nghiệm C.

Bài tập 19. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 20.



a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Trong ΔSAB vuông tại S, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{AB^2 + SA^2} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}.$$

b. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Trong ΔSAB vuông tại S, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c. Dựng thiết diện:

- Trong (SBC) dựng Hx ⊥ SB và cắt SC tại I.
- Nối D với I, ta được thiết diện là tứ giác AHID.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Trong mặt phẳng (SBC), ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SB \\ HI \perp SB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HI // BC // AD \\ HI \perp AH \end{cases} \Rightarrow \text{AHID là hình thang vuông tại A và H.}$$

d. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{HI}{BC} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{2a}{3}.$$

Từ đó:

$$S_{AHID} = \frac{1}{2}(AD + HI).AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2a}{3}\right).\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}.$$

ài tập 21.

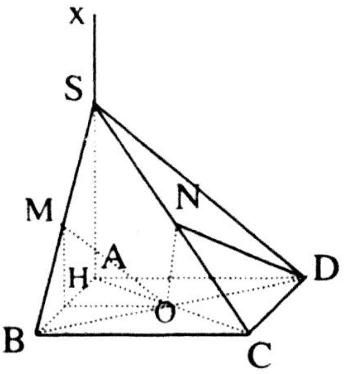
. Nhận thấy đường thẳng SB nằm trong mặt phẳng SAB) cố định và đi qua điểm B cố định.

Hạ $OH \perp AB$, từ giả thiết:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên đường hẳng SB, suy ra:

$SB \perp MH$, theo định lí ba đường vuông góc



$\Rightarrow \widehat{BMH} = 90^0 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính BH chứa trong (SAB).

Khi S di động trên tia Ax thì M thuộc nửa đường tròn đường kính BH trong nửa nặt phẳng (SAB) bờ AB.

. Nhận thấy đường thẳng SC nằm trong mặt phẳng (SAC) cố định và đi qua điểm cố định.

Ta có:

$$\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC).$$

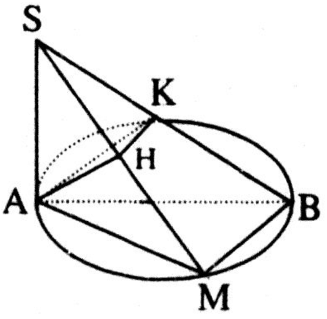
Gọi N là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng SC, suy ra:

$ON \perp SC$, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{ONC} = 90^0 \Rightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính OC chứa trong (SAC).

Khi S di động trên tia Ax thì N thuộc nửa đường tròn đường kính OC trong nửa nặt phẳng (SAC) bờ AC.

ài tập 22. Nhận thấy mặt phẳng (SBM) chứa đường hẳng SB cố định. Ta đi dựng mặt phẳng qua A và vuông óc với SB bằng cách:



- Trong (SAB) hạ $AK \perp SB$.
- Trong (SBM) dựng $Kx \perp SB$ và cắt SM tại H.

Khi đó:

$(AKH) \perp SB$ và $(AKH) \cap (SBM) = KH$.

Ta đi chứng minh $AH \perp (SBM)$, thật vậy:

$$\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AH \overset{SB\perp AH}{\Rightarrow} AH \perp (SBM).$$

Trong (AKH), ta có:

$$AH \perp HK \Leftrightarrow \widehat{AHK} = 90^0$$

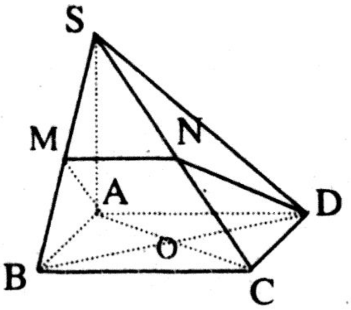
ên H thuộc đường tròn đường kính AK trong mặt phẳng (AKH).

ài tập 23.

. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (ADM) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (ADM) \cap (SBC) = Mx \end{cases}$$

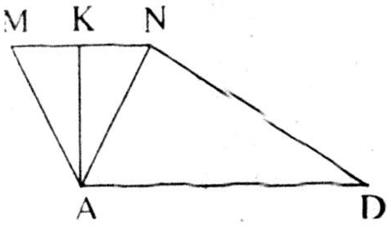
$$\Rightarrow Mx // AD // BC$$



à Mx cắt SC tại N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện AMND là hình thang.

Trong hình thang AMND hạ AK ⊥ MN, ta được:



$$S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD + MN).AK \qquad (1)$$

trong đó:

- Trong ΔSBC có MN là đường trung bình nên:

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}. \qquad (2)$$

- Trong ΔSAB vuông tại A có AM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

- Trong ΔSAC vuông tại A có AN là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

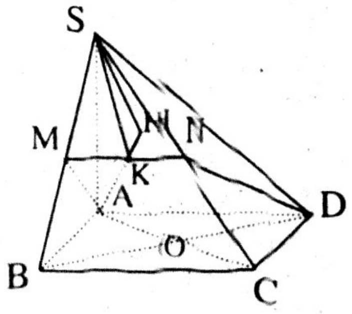
$$AN = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (4)$$

- Trong ΔAMN cân tại A, ta có:

$$AK = \sqrt{AM^2 - MK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}. \qquad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được:

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{7}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{16}.$$



b. Nhận thấy mặt phẳng (ADM) chứa đường thẳng AD cố định. Ta đi dựng mặt phẳng qua S và vuông góc với AD bằng nhận xét AK ⊥ MN ⇔ AK ⊥ AD

Khi đó:

(SAK) ⊥ AD và (SAK) ∩ (ADM) = AK.

Trong (SAK) hạ SH ⊥ AK thì H cũng là hình chiếu vuông góc của S trên (ADM).

Trong (SAK), ta có:

$$SH \perp AH \Leftrightarrow \widehat{SHA} = 90^0$$

nên H thuộc đường tròn đường kính SA trong mặt phẳng (SAK).

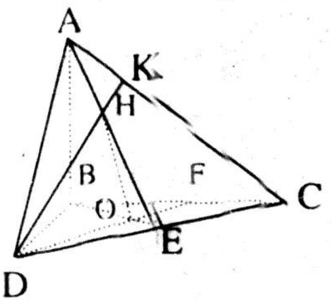
Hạn chế quĩ tích – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Bài tập 24. Đáp số trắc nghiệm a). A; b). B; c). D

Bài tập 25. Đáp số trắc nghiệm a). C; b). C; c). D; d). D.

Bài tập 26. Đáp số trắc nghiệm a). B; b). B; c). B; d). A; e). A; f). B; g). A.

Bài tập 27.



a. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC) \cap (ABD) = AB \\ (ABC) \perp (BCD) \text{ và } (ABD) \perp (BCD)\end{cases}$$

$$\Rightarrow AB \perp (BCD).$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow (ABE) \perp CD \in (ACD) \Rightarrow (ABE) \perp (ADC).$$

Ta có:

$$\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta lại có:

$DK \perp AC.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$(DFK) \perp AC \in (ACD) \Rightarrow (DFK) \perp (ADC).$

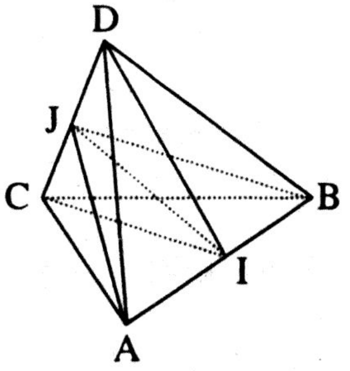
c. Từ kết quả trong b) là:

$(ABE) \perp CD \Rightarrow AE \perp CD \Rightarrow AE \cap DK = H.$

Ta có:

$$\begin{cases} (ABE) \cap (DFK) = OH \\ (ABD) \perp (ACD) \text{ và } (DFK) \perp (ACD) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$$

Bài tập 28.



a. Xét ΔACD và ΔBCD, ta có:

CD chung và $AC = AD = BC = BD$

suy ra $AJ = BJ \Leftrightarrow \Delta JAB$ cân tại $J \Rightarrow IJ \perp AB$.

Xét ΔCAB và ΔDAB, ta có:

AB chung và $AC = AD = BC = BD$

suy ra $DI = CI \Leftrightarrow \Delta ICD$ cân tại $I \Rightarrow IJ \perp CD$.

b. Đáp số trắc nghiệm B.

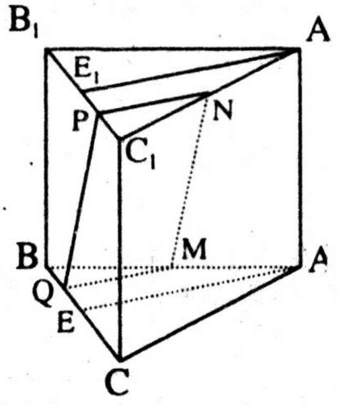
c. Đáp số trắc nghiệm C.

Bài tập 29.

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 30.



a. Gọi E, E_1 theo thứ tự là trung điểm của BC và B_1C_1, ta có ngay:

$AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (BCC_1B_1).$

$A_1E_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow A_1E_1 \perp (BCC_1B_1).$

$AE \overset{//}{=} A_1E_1.$

Do đó:

- Dựng Mx // AE cắt BC tại Q là trung điểm của BE.
- Dựng Ny // A_1E_1 cắt B_1C_1 tại P là trung điểm của E_1C_1.

Vì MQ // NP nên M, N, P, Q đồng phẳng, do vậy MNPQ chính là thiết diện cần dựng.

Nhận xét rằng:

$$MQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AE \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1E_1 \overset{//}{=} NP \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

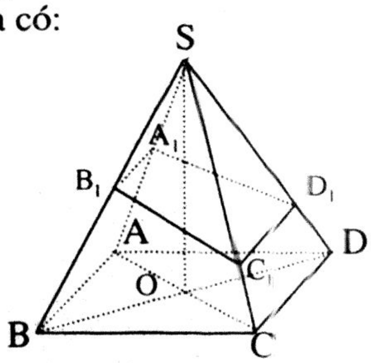
$MQ \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow MQ \perp PQ.$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình chữ nhật.

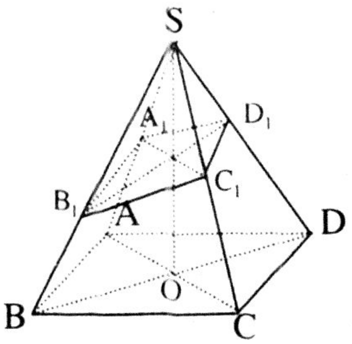
b. Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 31.

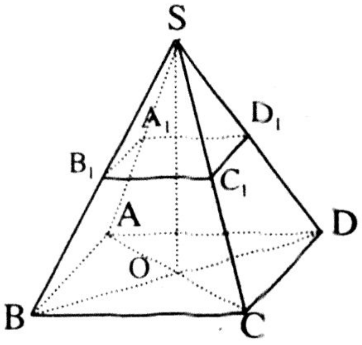
a. Ta có:



Với A_1B_1 // (ABCD)



Với A_1C_1 // (ABCD)



Với A_1B_1 // (ABCD)
và A_1C_1 // (ABCD)

- Với A_1B_1 // (ABCD) thì:

  $$A_1B_1 // AB // CD \Rightarrow A_1B_1 // C_1D_1 \text{ và } A_1D_1 = B_1C_1$$

  Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình thang cân.

- Với A_1C_1 // (ABCD) thì A_1C_1 // AC.

  Mặt khác, ta lại có:

  $$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp B_1D_1 \Rightarrow A_1C_1 \perp B_1D_1.$$

  Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

- Với A_1B_1 // (ABCD) và A_1C_1 // (ABCD) thì

  $$(A_1B_1C_1D_1) // (ABCD)$$

  Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình vuông.

b. *Hướng dẫn*: Thực hiện phép tính diện tích ΔSA_1C_1 và ΔSB_1D_1.

Bài tập 32. Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng (P), ta được:

$$\widehat{ABH} = \beta \text{ và } \widehat{ACH} = \gamma.$$

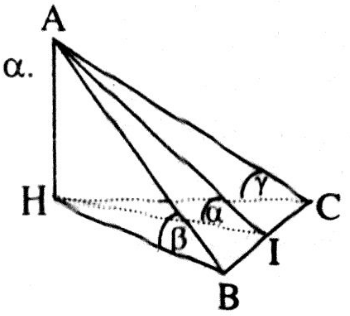
Kẻ HI vuông góc với mặt phẳng BC, suy ra:

BC ⊥ AI, theo định lí ba đường vuông góc ⇒ AIH = α.

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{IA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{AH^2}{IA^2} = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$



Bài tập 33. Đáp số trắc nghiệm C.

Bài tập 34.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (Dựng góc dựa trên giao tuyến): Giả sử AD ∩ BC = E ⇒ (SAD) ∩ (SBC) = SE.

Nhận xét rằng:

AD ⊥ BD, vì ABCD là nửa lục giác đều

SA ⊥ BD, giả thiết

suy ra BD ⊥ (SAD) ⇒ BD ⊥ SE

Hạ DF ⊥ SE tại F, suy ra (BDF) ⊥ SE

Như vậy, ta được một góc phẳng giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $\widehat{BFD}$.

Vì ΔABE đều nên $AE = AB = 2a$.

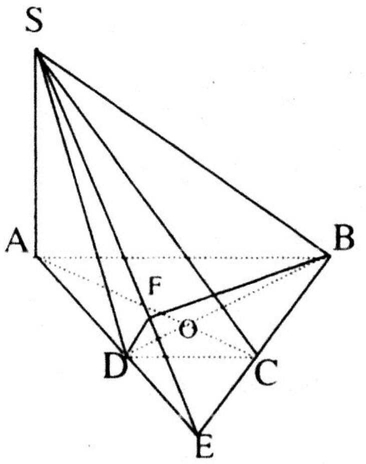
Vì ΔCDE đều nên $DE = CD = a$.

Trong ΔSAE vuông tại S, ta có:

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2 \Rightarrow SE = a\sqrt{7}.$$

Hai tam giác vuông SAE và DFE có chung góc $\hat{E}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{DF}{SA} = \frac{DE}{SE} \Rightarrow DF = \frac{SA.DE}{SE} = \frac{a\sqrt{3}.a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$BD = AB.\sin\widehat{BAD} = 2a.\cos 60^0 = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔBDF vuông tại D, ta có:

$$\tan\widehat{BFD} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{7}} = \sqrt{7} \Rightarrow \widehat{BFD} \text{ nhọn.}$$

Vậy, ta được $\tan((SAD), (SBC)) = \sqrt{7}$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$AD \perp BD$, vì ABCD là nửa lục giác đều

$SA \perp BD$, giả thiết

suy ra $BD \perp (SAD)$. (1)

Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

$BC \perp SA$, giả thiết

suy ra:

$$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC). \quad (2)$$

Trong (SAC) hạ $OK \perp SC$ tại K, suy ra $OK // AJ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$((SAD), (SBC)) = (BD, AJ) = (BD, OK) = K\hat{O}B.$$

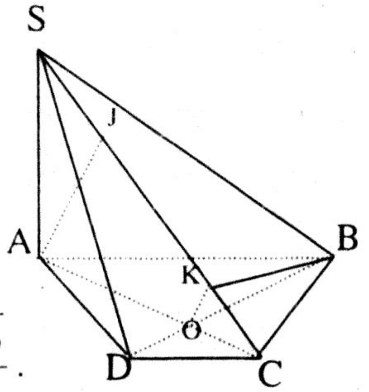
Trong nửa lục giác đều ABCD, ta có:

$$OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔSAC vuông tại S, ta có:

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + (AB^2 - BC^2)$$
$$= \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (4a^2 - a^2) = 6a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{6}.$$

Hai tam giác vuông SAC và OKC có chung góc nhọn $\hat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:



$$\frac{OK}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OK = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong ΔKOB vuông tại K, ta có:

$$\cos\widehat{KOB} = \frac{OK}{OB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy, ta được $\cos((SAD), (SBC)) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Bài tập 35.

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. ΔABC vuông cân.

Bài tập 36.

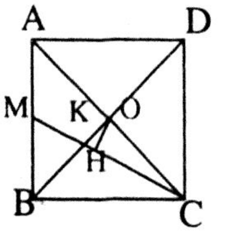
a. Trong ΔSAC, ta có:

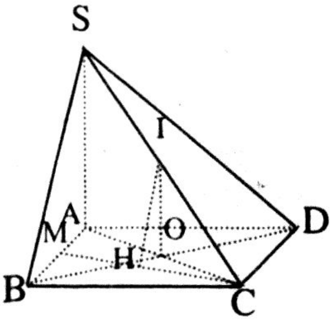
OI là đường trung bình $\Rightarrow OI // SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

b. Đáp số trắc nghiệm C.

Lời giải tự luận: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên CM, ta có:

$$\begin{cases} CM \perp HI \\ CM \perp OI \end{cases} \Rightarrow CM \perp (IOH) \Rightarrow CM \perp OH.$$





Trong ΔABC có K là trọng tâm, ta có:

$$OB = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$OK = \frac{1}{3}OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Trong ΔOCK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2}/6)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{20}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{20}}.$$

Trong ΔOIH vuông tại O, ta có:

$$IH^2 = OI^2 + OH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Vậy, khoảng cách từ I tới CM bằng $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vì $SI \cap CM = C$ nên:

$$\frac{d(S, CM)}{d(I, CM)} = \frac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow d(S, CM) = 2d(I, CM) = 2IH = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Bài tập 37.

a. Gọi M là trung điểm của SC. Trong ΔSAC, ta có:

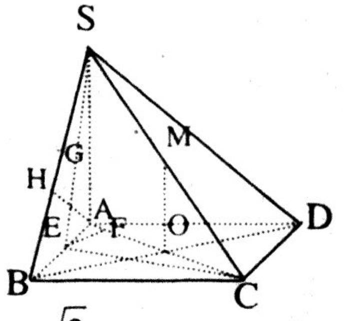
OM là đường trung bình $\Rightarrow OM // SA \Rightarrow OM \perp (ABCD)$.

Vậy OM là đường thẳng cần dựng.

b. Đáp số trắc nghiệm A.

ời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$$



Hạ AH vuông góc với SB, ta có ngay AH ⊥ (SBC).
Vậy AH là đường thẳng cần dựng.
Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

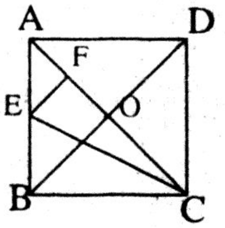
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

. Đáp số trắc nghiệm B.

. Đáp số trắc nghiệm C.

ời giải tự luận: Gọi E là trung điểm AB, hạ EF ⊥ AC, ta được:

$$\begin{cases} EF \perp AC \\ EF \perp SA \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAC)$$



o đó EF chính là khoảng cách từ E tới (SAC).

Trong ΔOAB, ta có:

$$\text{EF là đường trung bình} \Rightarrow EF = \frac{1}{2}OB = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

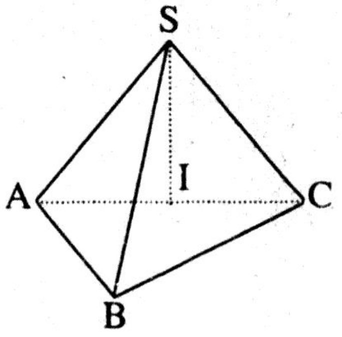
Gọi G là trọng tâm ΔABC, vì EG ∩ (SAC) = S nên:

$$\frac{d(G,(SAC))}{d(E,(SAC))} = \frac{GS}{ES} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G,(SAC)) = \frac{2}{3}d(E,(SAC)) = \frac{2}{3}EF = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

ài tập 38.

. Trong ΔSAB vuông cân tại S, ta có:

$$AB = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$



Trong ΔSBC cân tại S có $\widehat{BSC} = 60^0$ nên là tam giác ều, suy ra BC = a.

Trong ΔSAC cân tại S, ta có:

$$\widehat{SAC} = 30^0,$$

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 3a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Nhận xét rằng:

$$AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2$$

⇔ ΔABC vuông tại B ⇒ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vậy với SA = SB = SC, ta được:

SI ⊥ (ABC) và d(S, (ABC)) = SI.

. Đáp số trắc nghiệm A.

ời giải tự luận: Trong ΔSAI vuông tại I, ta có:

$$SI = SA.\sin\widehat{SAI} = SA.\sin\widehat{SAC} = a.\sin30^0 = \frac{a}{2}.$$

Vậy, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{a}{2}$.

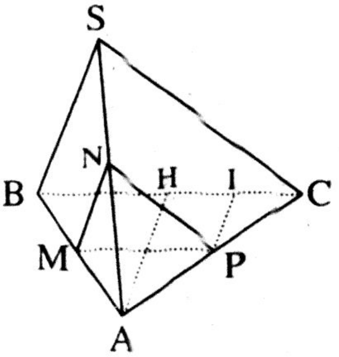
Bài tập 39.

a. Vì M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC nên:

MN // SB, do MN là đường trung bình trong ΔSAB

MP // BC, do MP là đường trung bình trong ΔABC

suy ra (MNP) // (SBC).



b. **Đáp số trắc nghiệm C.**

Lời giải tự luận: Từ kết quả câu a), ta có:

$$d((MNP), (SBC)) = d(P, (SBC)).$$

Mặt khác ta lại có $AP \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(P, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{PC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(P, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)).$$

Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay $AH \perp (SBC)$. Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Vì ΔABC đều có cạnh bằng a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

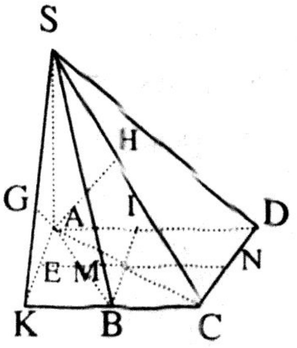
Từ đó, suy ra:

$$d(P, (SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài tập 40.

a. **Đáp số trắc nghiệm B.**



Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC).$$

Hạ AH vuông góc với SC, ta có ngay $AH \perp (SCD)$.

Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SCD).

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

b. **Đáp số trắc nghiệm B.**

c. **Đáp số trắc nghiệm C.**

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$AD // CD \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)).$$

Hạ AK vuông góc với BC, ta được:

$$\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK) \text{ và } (SBC) \cap (SAK) = AK.$$

Hạ AG vuông góc với SK, ta có ngay $AG \perp (SBC)$.

Vậy AG là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Trong ΔSAK vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

d. Đáp số trắc nghiệm A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} AK \perp AD \\ AK \perp SA \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SAD).$$

Giả sử mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) cắt AK tại E, khi đó:

$$d(\alpha, (SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK \Rightarrow \text{E là trung điểm của AK.}$$

Ta đi xác định thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng α qua E và song song với (SAD), như sau:

$$\begin{cases} \alpha // (SAD) \\ \alpha \cap (ABCD) = Ex \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \end{cases} \Rightarrow Ex // AD$$

và Ex cắt AB, CD theo thứ tự tại M, N là trung điểm của mỗi đoạn.

Trong mặt phẳng (SAB) dựng My // SA và cắt SB tại Q là trung điểm của SB.

Trong mặt phẳng (SCD) dựng Nz // SD và cắt SC tại P là trung điểm của SC.

Vậy, thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng α là MNPQ, ngoài ra vì:

$MN // CD // PQ \Rightarrow$ MNPQ là hình thang

$MQ // SA \Rightarrow MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \perp MN \Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông

Từ đó, ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

trong đó:

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{3a}{2}, \text{ vì MN là đường trung bình của ABCD,}$$

$$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \text{ vì PQ là đường trung bình của } \Delta SBC,$$

$$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \text{ vì MQ là đường trung bình của } \Delta SAB,$$

suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Bài tập 41.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

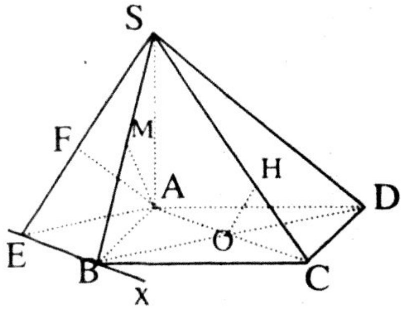
$AD \perp AB$, vì ABCD là hình vuông

$AD \perp SA$, vì SA vuông góc với (ABCD)

suy ra $AD \perp (SAB)$.

Dựng AM vuông góc với SB thì AM là đoạn vuông góc chung của SB và AD.

Trong ΔSAB vuông cân tại A, ta có:



$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b. **Đáp số trắc nghiệm** C.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$BD \perp AC$, vì ABCD là hình vuông

$BD \perp SA$, vì SA vuông góc với (ABCD)

suy ra $BD \perp (SAC)$.

Dựng OH vuông góc với SC thì OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Nhận xét rằng ΔHCO và ΔACS là hai tam giác vuông có chung góc nhọn $\widehat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA.OC}{SC}$$

trong đó:

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{3}$$

suy ra:

$$OH = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

c. **Đáp số trắc nghiệm** A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$CD // AB \Rightarrow CD // (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = a.$

Vậy, khoảng cách giữa SB và CD bằng a.

d. **Đáp số trắc nghiệm** A.

e. **Đáp số trắc nghiệm** B.

Lời giải tự luận: Dựng:

$Bx // AC \Rightarrow AC // (S, Bx) \Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (S, Bx))$

Hạ AE vuông góc với Bx, ta được:

$$\begin{cases} Bx \perp AE \\ Bx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (S, Bx) \Rightarrow (S, Bx) \perp (SAE) \text{ và } (S, Bx) \cap (SAE) = SE.$$

Hạ AF vuông góc với SE, ta có ngay $AE \perp (S, Bx)$.

Vậy AF là khoảng cách từ điểm A tới (S, Bx).

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$AE = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SB và AC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

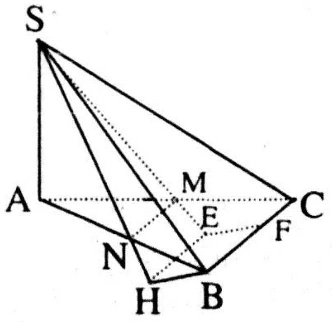
Bài tập 42.

a. Để dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Gọi N là trung điểm AB, suy ra BC // MN ⇒ BC // (SMN).

Ta có:

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB) \text{ và } (SMN) \cap (SAB) = SN.$$



Hạ $BH \perp SN$ suy ra $BH \perp (SMN)$.

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Do đó (SAB) chính là mặt phẳng qua B thuộc BC và vuông góc với BC.

Gọi N là trung điểm AB, suy ra:

$$MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

suy ra SN là hình chiếu vuông góc của SM trên (SAB).

Hạ $BH \perp SN$ suy ra $BH \perp (SMN)$.

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Đáp số trắc nghiệm A.

Bài tập 43.

a. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Hạ OI vuông góc với BC và kéo dài OI cắt AD tại J.

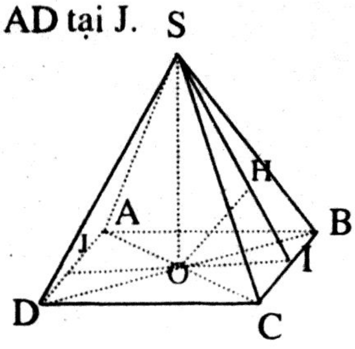
Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$$

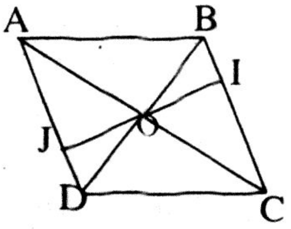
$$\Rightarrow (SBC) \perp (SOI) \text{ và } (SBC) \cap (SOI) = SI$$

Hạ OH vuông góc với SI, ta có ngay $OH \perp (SBC)$.

Vậy OH là khoảng cách từ điểm O tới (SBC).



Với hình thoi ABCD, ta có:



$$BD = a, \text{ vì } \Delta ABD \text{ đều} \Rightarrow OB = \frac{a}{2}$$

$$AC = 2AO = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a/2)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{13}{3a^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{39}/13)^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách từ O đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b. Đáp số trắc nghiệm D.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$AD \,//\, BC \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$

$\Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(J, (SBC))$.

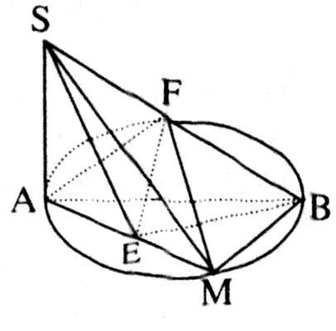
Mặt khác, ta lại có $JO \cap (SBC) = I$ nên:

$$\frac{d(J,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{JI}{OI} = 2 \Rightarrow d(J,(SBC)) = 2d(O,(SBC)) = 2OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 44. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AM và SB.

Nhận xét rằng, dựa trên tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông, ta có:



$$AF = \frac{1}{2}SB \text{ và } MF = \frac{1}{2}SB = \frac{\sqrt{h^2 + 4R^2}}{2}$$

$\Rightarrow MF = AF \Leftrightarrow \Delta AFM$ cân tại $F \Rightarrow EF \perp AM$.

Như vậy, để EF là đoạn thẳng vuông góc chung của AM và SB điều kiện là:

$EF \perp SB \Leftrightarrow \Delta ESB$ cân tại $E \Leftrightarrow SE = BE$. (1)

Đặt $AE = x$, suy ra $ME = x$.

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow SE = \sqrt{h^2 + x^2}. \qquad (2)$$

Trong ΔEMB vuông tại M, ta có:

$$BE^2 = BM^2 + ME^2 = (AB^2 - AM^2)^2 + ME^2 = 4R^2 - 4x^2 + x^2 = 4R^2 - 3x^2$$

$$\Rightarrow BE = \sqrt{4R^2 - 3x^2}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\sqrt{h^2+x^2}=\sqrt{4R^2-3x^2} \Leftrightarrow h^2+x^2=4R^2-3x^2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{4R^2-h^2}}{2} \Rightarrow AM=2x=\sqrt{4R^2-h^2}.$$

Trong ΔMEF vuông tại E, ta có:

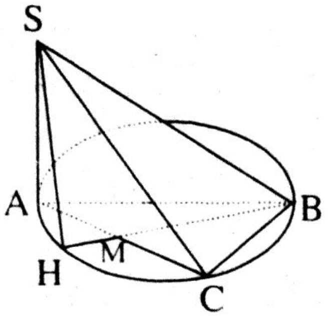
$$EF^2=MF^2-ME^2=\frac{h^2+4R^2}{4}-\frac{4R^2-h^2}{4}=\frac{h^2}{2} \Rightarrow EF=\frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, với điểm M thuộc đường tròn sao cho $AM=\sqrt{4R^2-h^2}$ thì EF là đoạn thẳng vuông góc chung của AM và SB, và khi đó $EF=\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 45.

a. Vì $SA \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của SH trên (ABC), do đó:

$AH \perp BM$, theo định lí ba đường vuông góc.



b. Đáp số trắc nghiệm B.

Lời giải tự luận: Ta thấy ngay khoảng cách từ S đến BM chính là SH và trong ΔSAH ta có:

$$SH^2=SA^2+AH^2. \qquad (1)$$

Trong ΔABC vuông tại C có $\widehat{BAC}=30^0$ nên:

$$BC=\frac{AB}{2}=a \text{ và } AC=AB.\cos\widehat{BAC}=2a.\cos30^0=a\sqrt{3}.$$

Trong ΔBCM vuông tại C, ta có:

$$BM^2=BC^2+CM^2=BC^2+(AC-AM)^2=a^2+(a\sqrt{3}-x)^2=x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2$$

$$\Leftrightarrow BM=\sqrt{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}.$$

Nhận xét rằng ΔAMH và ΔCMB là hai tam giác vuông có AMH = CMB nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{AH}{BC}=\frac{AM}{BM} \Rightarrow AH=\frac{AM.BC}{BM}=\frac{xa}{\sqrt{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}}. \qquad (2)$$

Thay (2) và SA = 2a vào (1), ta được:

$$SH^2=4a^2+\frac{x^2a^2}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}=\frac{5x^2a^2-8\sqrt{3}a^3x+16a^4}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}$$

$$\Leftrightarrow SH=\sqrt{\frac{5x^2a^2-8\sqrt{3}a^3x+16a^4}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}}.$$

c. Từ hệ thức (1) với SA = 2a không đổi, ta có nhận xét:

- SH đạt giá trị lớn nhất khi:

  $$AH_{Max} \Leftrightarrow AM_{Max} \Leftrightarrow M \equiv C \Leftrightarrow x=a\sqrt{3}.$$

- SH đạt giá trị nhỏ nhất khi:

  $$AH_{Min} \Leftrightarrow AM_{Min} \Leftrightarrow M \equiv A \Leftrightarrow x=0.$$

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU 3

PHẦN I
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 1: Các hàm số lượng giác 5
§ 2: Công thức lượng giác 10
§ 3: Phương trình lượng giác cơ bản 15
§ 4: Một số dạng phương trình lượng giác đơn giản 18
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 31

CHƯƠNG II: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§ 1: Hai quy tắc đếm cơ bản 45
§ 2: Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp 48
§ 3: Công thức nhị thức Niu–tơn 53
§ 4: Biến cố và xác suất của biến cố 57
§ 5: Các quy tắc tính xác suất 59
§ 6: Xác suất có điều kiện 61
§ 7: Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc 62
§ 8: Kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc 63
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 66

CHƯƠNG III: DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§ 1: Phương pháp quy nạp toán học 74
§ 2: Dãy số 75
§ 3: Cấp số cộng 79
§ 4: Cấp số nhân 82
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 85

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

§ 1: Dãy có giới hạn 0 90
§ 2: Dãy số có giới hạn 91
§ 3: Dãy số dần đến vô cực 95
§ 4: Định nghĩa giới hạn của hàm số. Một số định lí về giới hạn 98
§ 5: Giới hạn một bên 103
§ 6: Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực 105
§ 7: Các dạng vô định 107
§ 8: Hàm số liên tục 110
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 116

CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

§ 1: Đạo hàm và ý nghĩa của đạo hàm 128
§ 2: Các quy tắc tính đạo hàm 132
§ 3: Đạo hàm của các hàm số lượng giác 136
§ 4: Vi phân 138
§ 5: Đạo hàm cấp cao 140
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 144

PHẦN II

HÌNH HỌC

CHƯƠNG I: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§ 1: Phép dời hình 150
§ 2: Phép đối xứng trục 152
§ 3: Phép tịnh tiến 155
§ 4: Phép quay và phép đối xứng tâm 157
§ 5: Hình bằng nhau 159
§ 6: Phép vị tự 160
§ 7: Phép đồng dạng 163
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 165

CHƯƠNG II: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

§ 1: Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 178
§ 2: Hai đường thẳng song song 183
§ 3: Đường thẳng song song với mặt phẳng 186
§ 4: Hai mặt phẳng song song 189
§ 5: Phép chiếu song song 195
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 198

CHƯƠNG III: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§ 1: Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ 212
§ 2: Hai đường thẳng vuông góc với nhau 216
§ 3: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 218
§ 4: Hai mặt phẳng vuông góc 223
§ 5: Khoảng cách 229
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 234

MỤC LỤC 254

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc:	PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập:	NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập:	THU HIÊN, TRẦN HƯNG
Sửa bài:	ĐÌNH TÔ
Chế bản:	Nhà sách HỒNG ÂN
Trình bày bìa:	NGỌC ANH

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN 11

Mã số: 1L - 182ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 533 - 2007/CXB/08 – 77/ĐHQGHN, ngày 10/7/2007.
Quyết định xuất bản số: 408 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.